6 класс

Вариант 1

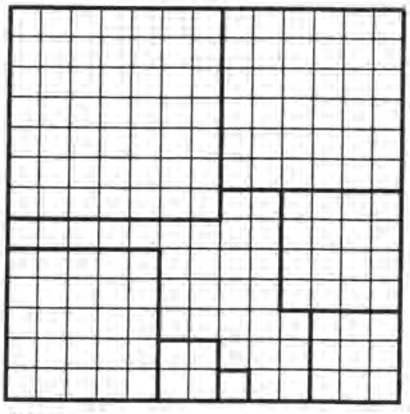
1) Понятно, что для минимального количества выстрелов надо, чтобы все попадание кроме 16 были не более одного раза. Иначе, вместо таких двух попаданий, например, в 4, достаточно одного попадания в 8. Выбираем максимально возможное количество попаданий в 16, а дальше в каждую меньшую не более одного попадания: $55 = 16 + 16 + 16 + 4 + 2 + 1$. Достаточно 6 выстрелов.

Ответ: 6 выстрелов.

2) Из того, что сумма первых трех цифр равна 3, а сумма последних трех цифр равна 6, следует, что разность между последней цифрой и первой цифрой равна 3. Обозначим первую цифру через x (в силу того, что сумма первых трех цифр равна 3, $x < 4$), тогда последняя цифра будет $x + 3$, сумма первой и последней цифр равна $2x + 3$, т.е. является нечетным числом. Так как это число по условию делится на 7, и, очевидно, $0 < 2x + 3 < 8 + 3 = 11$. Таким образом, $2x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 2$. Значит, искомых чисел два: 2015 и 2105.

Ответ: Вася прав.

3) Если вырезать квадрат со стороной 7 из квадрата, сторона k которого меньше 13, ширина любой из оставшихся полосок будет не больше $k - 7 < 6$. Поэтому $k \geq 13$. Вырезать можно, например, так, как показано на рисунке.



Ответ: 13.

4) Из 10 чисел с последней цифрой $0, 1, \ldots, 9$ всегда найдется делящееся на 7, поэтому всегда выигрывает Саша.

Ответ: выиграет Саша.

5) Первым взвешиванием Бельчонок может проверить равенство $3 + 4 + 8 = 7 + 6 + 2$, поставив на чаши соответствующие банки. Если весы показывают равенство, орех содержится в одной из двух оставшихся банок. Тогда поставим на одну чашу весов банки по 1 кг и 4 кг, а на другую чашу – банку 5 кг. Если перевесила банка в 5 кг, то орех в нем; если банки по 1 и 4 кг – орех в килограммовой банке; равновесие невозможно, поскольку из-за ореха

вес одной из банок мы учитываем неверно. Если в первом взвешивании перевесила левая чаша, орех содержится в одной из банок весом 3, 4 или 8 кг. Тогда вторым взвешиванием мы проверим равенство $3 + 5 = 8$: в случае равновесия орех находится в четырехкилограммовой банке; если перевесила правая чаша – орех в банке весом 8 кг; если левая – в банке весом 3 кг. Наконец, если в первом взвешивании перевесила правая чаша, орех содержится в одной из банок весом 2, 6, 7 кг. Вторым взвешиванием мы можем проверить равенство $2 + 5 = 7$: в случае равновесия орех находится банке весом 6 кг; если перевесила правая чаша – орех в банке весом 7 кг; если левая – в банке весом 2 кг.

Ответ: за 2 взвешивания.

6 класс

Вариант 2

1) Очевидно, что победитель должен был набрать не менее четверти от всех голосов. Поскольку $\frac{1}{4} \cdot 83 = 20{,}75$, то победитель должен был набрать не менее 21 голоса.

Если победитель набрал 21 голос, то ни один из других трех кандидатов при условии не мог получить более 20 голосов, а потому в сумме кандидаты набрали бы не больше $21 + 3 \cdot 20 = 81 < 83$ голосов, чего быть не может.

А если бы победитель набрал 22 голоса, а другие кандидаты, например, 21, 20 и 20 голосов, то в сумме все кандидаты набрали бы 83 голоса, то есть условие задачи выполнялась бы. Итак, победитель мог набрать 22 голоса или более.

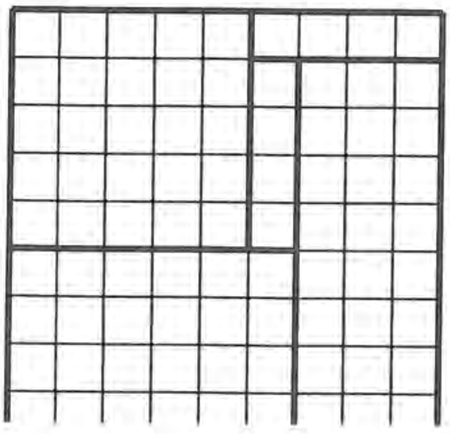
Ответ: 22.

2) *Первый способ.* Действительно, если бы такие числа существовали, то оба они делились бы на 110, следовательно, и на 11. С другой стороны, их НОК также должен делиться на 11, но 2015 на 11 не делится.

Второй способ. Очевидно, что $\text{НОК}(a, b) \vdots \text{НОД}(a, b)$, но 2015 не делится на 110.

Ответ: нет.

3) Пример показан на рисунке.



4) Обозначим игроков А (Андрей, начинающий) и В (Вадим). Приведем стратегию, позволяющую А гарантированно выиграть. Пусть он возьмет первым ходом цифру 1; тогда В вынужден брать 2 (иначе А вторым ходом ее возьмет и выиграет, составив число 21). При этом вторым своим ходом В не сможет выиграть, так как двузначные числа, содержащие 2 в своей записи и делящиеся на 7, — это 21, 28 и 42, но цифра 1 уже взята, а цифр 4 и 8 на карточках нет.. Далее А возьмет 0, после этого останутся цифры 3 и 5. Какую бы карточку В ни взял, он не сможет выиграть, А же следующим ходом возьмет оставшуюся цифру. Если это 5, то он составит число 105, если это 3, то составит число 301. Существуют и другие выигрышные стратегии для А.

Ответ: Андрей.

5) *Первый способ.* **I взвешивание.** Разделим мешки на группы по три мешка в каждой так, чтобы суммарные массы мешков в каких-то двух группах были равны. Например, $1+3+7$, $2+4+5$ и $6+8+9$. Взвесим две группы мешков, в которых масса должна быть одинаковой. Если весы покажут равенство, то кража была произведена из мешка третьей группы; если какая-то из взвешиваемых групп перевесит, то кража – из другой взвешиваемой группы.

II взвешивание. Рассмотрим найденную группу из трёх мешков, из которой была совершена кража. Кладем на весы по одному мешку из этой группы и на одну из чаш добавляем мешок из другой группы (из которой кража не совершалась) с известной массой с тем, чтобы уравновесить весы (то есть этот мешок играет роль гири).

Например, для первой группы на весы можно положить мешки $1+(2)$ и 3; для второй – $2+(3)$ и 5; для третьей – $6+(2)$ и 8 (в скобках указаны «мешки-гири»). Если весы уравновесились, то кража совершена из оставшегося мешка, а если нет, то из лежащего на более легкой чаше.

Второй способ. Расположим массы мешков в виде таблицы. Разделим мешки на три группы по три мешка так, чтобы в каждую группу вошло по одному мешку из каждой строки и по одному мешку из каждого столбца. При этом суммарная масса мешков в каждой тройке будет равна 15.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Для решения задачи достаточно рассмотреть любой из двух примеров такого разбиения. Выберем один из них: $1+5+9, 2+6+7$ и $3+4+8$(вариант: $1+6+8, 2+4+9$ и $3+5+7$ рассматривается аналогично).

I взвешивание. Взвесим две тройки мешков. Если какая-то из них перевесит, то кража была произведена из другой взвешиваемой тройки. Если же весы покажут равенство, то орех похищен из мешка третьей тройки.

II взвешивание. Рассмотрим найденную группу из трёх мешков, из которой была совершена кража. На две чаши весов кладем по мешку из этой тройки: на одну – из первой строки таблицы, на другую – из второй. К первому мешку добавляем тот, что находится в таблице в клетке под вторым, а ко второму добавляем тот, что находится в таблице в клетке под первым. Например, если ограблена тройка $2 + 6 + 7$, то на одну чашу весов кладем $2 + 9$, а на другую – $6 + 5$. Заметим, что добавленные мешки не ограблены (два мешка из одного столбца не могут одновременно находиться в «подозрительной» тройке). Без воровства весы находились бы в равновесии (так как один из мешков, лежащих на одной чаше весов, на три килограмма легче своего «партнера» на другой чаше, зато другой – на 3 кг тяжелее). Поэтому если весы в равновесии, то ограблен третий мешок из тройки (в нашем примере – это 7 кг), а если одна из чаш перевешивает, то ограблен мешок из «подозрительной» тройки, лежащий на другой, более легкой чаше весов.