11 класс

Вариант 1

1) Пусть x – количество алмазов, y – число оставленных сиклей, z – число подарков. Тогда $150x - y = 51z$, $150x - 50z = y + z$. По условию x не

больше 30, следовательно, z не больше 90, y не больше 8, следовательно, $z + y$ не больше 98. Но $z + y = 50(3x - z)$, следовательно, $z + y$ должно делиться на 50, отсюда $z + y = 50$, а $3x - z = 1$ и z может принимать значения от 42 до 45 (поскольку y не меньше 5 и не больше 8). Из уравнения $3x - z = 1$ вытекает, что остаток z от деления на 3 равен 2, в интервале $[42, 45]$ одно такое значение $z = 44$. При этом количество алмазов $x = 15$, число оставленных сиклей $y = 6$.

Ответ: 44 подарка.

2) Возможны различные способы решения, основанные на получении различных следствий из данных равенств.

Первый способ. Возведем каждое из равенств в квадрат, тогда $\cos^2 A + \sin^2 B + 2\cos A \sin B = 2$ и $\sin^2 A + \cos^2 B + 2\sin A \cos B = 2$. Сложим полученные равенства и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса суммы: $2 + 2\sin A \cos B + 2\cos A \sin B = 4 \Leftrightarrow \sin(A + B) = 1$, следовательно, $A + B = 90^\circ$, тогда $C = 180^\circ - (A + B) = 90^\circ$.

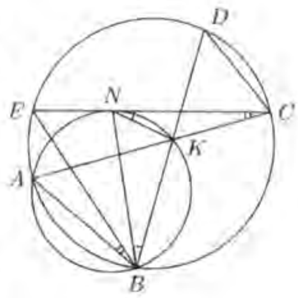
Второй способ. Почленно сложим исходные равенства: $\sin A + \cos A + \sin B + \cos B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos B\right) = 2 \Leftrightarrow \sin(A + 45^\circ) + \sin(B + 45^\circ) = 2$. Так как $|\sin x| \leq 1$, то последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\sin(A + 45^\circ) = 1$ и $\sin(B + 45^\circ) = 1$. Следовательно, $A + 45^\circ = 90^\circ$ и $B + 45^\circ = 90^\circ$, то есть $A = B = 45^\circ$. Значит, $C = 90^\circ$.

Третий способ. Почленно перемножим исходные равенства и используем формулы двойного аргумента и косинуса разности: $\sin A \cos A + \sin A \sin B + \cos A \cos B + \cos B \sin B = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2A + \frac{1}{2}\sin 2B + \cos(A - B) = 2$. Так как $|\sin x| \leq 1$ и $|cos\, x| \leq 1$, то последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \sin 2A = 1, \\ \sin 2B = 1, \\ \cos(A - B) = 1. \end{cases}$ Следовательно, $A = B = 45^\circ$, то есть $C = 90^\circ$.

В каждом из приведенных способов решения на заключительном этапе необходимо убедиться, что полученные значения A, B и C удовлетворяют каждому из данных равенств, что соответствует действительности.

Ответ: $\angle C = 90^\circ$.

3) Пусть $\angle CNK = x$, $\angle ECA = \alpha$. Тогда $\angle NBK = x$ как вписанный угол, опирающийся на дугу NK; $\angle ABE = \alpha$ как вписанный угол, опирающийся на дугу AE. Далее, $\angle NKA = x + \alpha$ как внешний угол в треугольнике NKC и тогда $\angle NBA = x + \alpha$ как угол, опирающийся на ту же дугу. Теперь находим, что $\angle NBE = \angle NBA - \angle ABE = x$. Таким образом, $\angle DBE = \angle NBK + \angle NBE = 2x$ и при этом $\angle DBE = \angle DCE = 40^\circ$. Значит, $2x = 40^\circ$.



Ответ: $\angle CNK = 20^\circ$.

4) Так как $n^2 a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = (n-1)^2 a_{n-1} + a_n$, то

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot a_{n-2} = \cdots = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1$$
$$= \frac{1}{n(n+1)}.$$

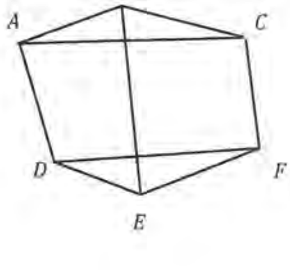
Тогда $a_{2015} = \frac{1}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{4062240}$.

Ответ: $a_{2015} = \frac{1}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{4062240}$.

5) Рассмотрим любую девочку D и трех ее знакомых девочек D_1, D_2, D_3. По условию, для каждой из девочек D_1, D_2, D_3 есть мальчик, знакомый с ней и с D. Если для всех троих это один и тот же мальчик, то у него не меньше четырех знакомых девочек, что противоречит условию. Значит, у D не меньше двух знакомых мальчиков. Поскольку D – произвольная девочка, это означает, что у каждой девочки не меньше двух знакомых мальчиков.

Теперь посчитаем количество знакомств между мальчиками и девочками. С одной стороны, это количество равно $3m$, где m – число мальчиков. С другой стороны, оно не меньше, чем $2 \cdot 30$, так как каждая из 30 девочек участвует хотя бы в двух таких знакомствах. Следовательно, $3m \geq 2 \cdot 30 = 60$, откуда $m \geq 20$.

Итак, мы доказали, что мальчиков не меньше 20. Осталось привести пример, в котором их ровно 20. Возьмем группу из 6 девочек и 4 мальчиков и организуем знакомства между ними следующим образом. Обозначим девочек A, B, C, D, E, F. Пусть девочки A, B, C знакомы между собой и девочки D, E, F



знакомы между собой. Кроме того, пусть A знакома с D, B – с E и C – с F. Пусть первый мальчик знаком с девочками A, B, C, второй – с A, D, E, третий – с B, E, F, четвертый – с C, F, D. Нетрудно проверить, что при такой схеме знакомств для этих 6 девочек и 4 мальчиков условия задачи выполняются. Взяв пять таких групп, получим пример, в котором 30 девочек и 20 мальчиков.

Ответ: наименьшее возможное количество бельчат-мальчиков равно 20.

11 класс

Вариант 2

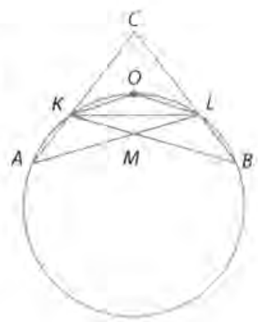
1) Каждый из x «счастливчиков» привел по 4 друга. Тогда «приведенных» бельчат $4x$, еще 13 пришли сами, значит, всего бельчат было $13 + 4x$. С другой стороны, x бельчат привели новых бельчат, а 100 – не привели, то есть всего бельчат было $x + 100$.

Итак, $13 + 4x = x + 100$, откуда $x = 29$.

Ответ: 29 бельчат.

2) Если бы выполнялось неравенство $\sin\beta \geq 0$, то оба неравенства можно было возвести в квадрат и сложить. Получилось бы неравенство $1 > 1$. Противоречие.

3) Обозначим через O центр описанной окружности треугольника KCL. Пусть $\angle AMK = \alpha$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $\angle KOL = 4\alpha$. Этот угол опирается на дугу $KABL$. Дуги AK и BL в сумме дают α, значит, на большую дугу AB приходится 3α. Тогда $\angle AKB = 3\alpha$. Так как угол AKB – внешний в треугольнике CKB, $\angle KBC = \angle AKB - \angle ACB = \alpha$. Тогда сумма противоположных углов O и B во вписанном четырехугольнике $KOLB$ равна 5α, откуда $5\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 36^\circ$.



Ответ: 72°.

4) *Первый способ.* Из равенства $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ следует, что $\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1-a_n}$.

Получаем:

$$\frac{1}{a_{2014}} = \frac{1}{a_{2013}} + \frac{1}{1 - a_{2013}} = \frac{1}{a_{2012}} + \frac{1}{1 - a_{2012}} + \frac{1}{1 - a_{2013}} = \cdots$$
$$= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{1 - a_1} + \frac{1}{1 - a_2} + \cdots + \frac{1}{1 - a_{2013}}.$$

Легко проверить по индукции, что $0 < a_n < 1$, поэтому $\frac{1}{1-a_n} > 1$.

Следовательно, $\frac{1}{a_{2014}} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{1-a_n} > 2 + 2013 = 2015$. Значит, $\frac{1}{a_{2014}} < \frac{1}{2015}$.

Второй способ. Пусть $b_n = \frac{1}{a_n}$. Тогда $b_1 = 2$ и $b_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_n^2}} = b_n + 1 + \frac{1}{b_n - 1} > b_n + 1$.

Поэтому $b_n > b_1 + (n-1) = n + 1$; $b_{2014} > 2015$ и, следовательно, $a_{2014} < \frac{1}{2015}$.

5) Из условия следует, что каждому из них не понравилось не больше 8 бельчат. Отметим бельчат точками и проведём отрезки от каждого ко всем, кто ему не понравился. Всего получится не больше, чем $8 \cdot 55 = 440$ отрезков. Всевозможных троек бельчат можно составить $55 \cdot 54 \cdot 53/6 = 26235$. Каждый отрезок указывает на 53 тройки, поэтому 440 отрезков указывает, самое большее, на $440 \cdot 53 = 23320 < 26235$ троек. Поэтому есть тройка, на которую не указывают отрезки, что и требовалось доказать.