10 класс

Вариант 1

1) Если в тарелках одинаковое количество орехов, то решение очевидно. Если нет, то уберем из тарелок орехи так, чтобы в одной из них остался один орех. Удвоим число орехов в этой тарелке и уберем из тарелок еще по ореху. Будем проводить эту операцию до тех пор, пока в тарелках не станет по два ореха, после чего уберем эти орехи.

Ответ: Вася прав.

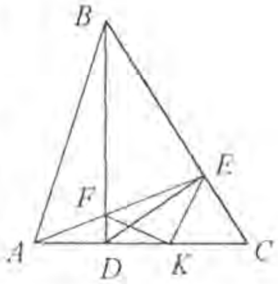
2) Центральную часть можно покрасить в один из трех цветов. Тогда все 12 секторов придется красить в другие два цвета, ведь каждый из секторов имеет общую границу с центральной частью. Сектор 1 можно покрасить в произвольный из двух цветов, а цвета остальных секторов устанавливаются после этого автоматически: сектор 2 должно быть окрашено в цвет, отличный от цвета центральной части и сектора 1; сектор 3 должен быть окрашен в цвет, отличный от цвета центральной части и сектора 2 и т. д. Легко видеть, что такое раскраска действительно удовлетворять условие задачи, ведь пара секторов 12 и 1 также будет раскрашена по-разному. Итак, имеем $3 \cdot 2 = 6$ вариантов раскраски.

Ответ: 6.

3) По теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, т.к. $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q$, то $p^2 - 4q = 2015$. Но нетрудно убедиться, что квадраты целых чисел дают в остатке при делении на 4 только 0 или 1. Но из $p^2 - 4q = 2015$ следует, что полный квадрат p^2 даёт в остатке 3 при делении на 4, так как 2015 дает в остатке 3 при делении на 4, а $4q$ делится на 4. Получаем противоречие с тем, что полный квадрат дает в остатке 3 при делении на 4.

Ответ: нет, невозможно.

4) Пусть K – середина DC. Тогда $AD = DK = KC = KE$. Заметим, что в треугольнике DEB углы равны 30°, 60° и 90°. Кроме того, $\angle DEF = 90^\circ - \angle BEF = 30^\circ$. Следовательно, треугольник DFE равнобедренный и $DF = FE = BF$. Проведем среднюю линию FK в треугольнике BDC. Она параллельна основанию BC, откуда $\angle DFK = \angle DBC = 60^\circ = \angle DFA$. Значит, отрезок FD является высотой треугольника AFK, поскольку совмещает в себе медиану и биссектрису. Следовательно, искомый угол прямой.



Ответ: 90°.

5) Для того, чтобы камень из точки $(1;1)$ можно было передвинуть в точку $(x;y)$, необходимо и достаточно, чтобы НОД$(x;y) = 2^s$ для некоторого неотрицательного целого s.

Сначала докажем необходимость. Как нетрудно заметить, обе разрешимые операции по передвижению камня по координатной плоскости либо оставляют неизменным НОД координат предыдущей точки, либо увеличивают его в два раза. В силу того, что НОД$(1;1) = 1$, получаем необходимость.

Докажем достаточность. Пусть НОД$(x;y) = 2^s$ для некоторого неотрицательного целого числа s. Из всех точек $(p;q)$ из которых можно попасть в точку $(x;y)$ выберем пару с наименьшей суммой $p + q$. Заметим, что оба числа p и q нечетные, поскольку иначе мы могли бы достигнуть точки $(x;y)$ из одной из пар $\left(\frac{p}{2};q\right)$, $\left(p;\frac{q}{2}\right)$ с меньшей суммой координат, что противоречит выбору пары $(p;q)$.

Если $p > q$, то мы могли бы получить пару $(p;q)$ из пары $\left(\frac{p+q}{2};q\right)$ с меньшей суммой координат» что опять противоречит выбору точки $(p;q)$. Аналогично получаем противоречие в случае $p < q$. Итак, $p = q$. В силу того, что

НОД$(p;q)$ является степенью двойки, и оба числа p и q нечетные, получаем, что $p = q = 1$, что и доказывает достаточность по определению точки $(p;q)$.

а) Так как НОД$(2014; 2015) = 1 = 2^0$ то камень можно передвинуть из точки $(1;1)$ в точку $(2014; 2015)$.

б) Так как НОД$(2015; 2015) = 2015$ не является степенью двойки, то камень нельзя передвинуть из точки $(1;1)$ в точку $(2015; 2015)$.

Ответ: а) да; б) нет.

<u>10 класс</u>

<u>Вариант 2</u>

1) Переложим из второго ящика два раза по 7 карандашей в любой другой непустой ящик, например, в первый, а потом заберём оттуда 15 карандашей во второй ящик. В итоге в первом ящике станет на один карандаш меньше, а во втором на один карандаш больше. Будем повторять эту операцию, используя второй ящик и любой непустой ящик. Ясно, что такими операциями можно переложить во второй ящик все карандаши.

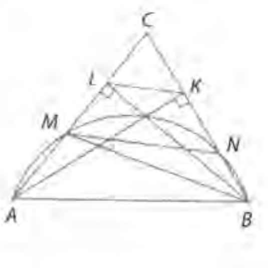
Ответ: можно.

2) Нужно выписать все такие неупорядоченные тройки натуральных чисел, что сумма всех трёх равна 25, а сумма любых двух больше третьего (неравенство треугольника). Можно классифицировать треугольники по равной стороне. Эта сторона может принимать значения 12, 11, 10, 9, 8 и 7. Соответствующие равнобедренные треугольники задаются следующими неупорядоченными тройками: $< 12, 12, 1 >$, $< 11, 11, 3 >$, $< 10, 10, 5 >$, $< 9, 9, 7 >$, $< 8, 8, 9 >$, $< 7, 7, 11 >$.

Ответ: 6 способов

3) Пусть трехчлен $ax^2 + bx + c$ (a, b, c – нечетные числа) имеет корень $\frac{1}{2015}$. Домножив равенство на 2015^2, получаем $a + 2015b + 2015^2c = 0$. Так как 2015 – нечетное число, то все три слагаемых нечетны, поэтому результат нечетный и нулем оказаться не может. Значит, число $\frac{1}{2015}$ не может являться корнем такого уравнения.

4) Заметим, что точка L – середина отрезка CM. Действительно, так как точки A, H, B и M лежат на одной окружности, то $\angle HBM = \angle HAC = 90^{\circ} - \angle C = \angle HBC$.



Значит, в треугольнике CBM высота совпадает с биссектрисой, т.е. он равнобедренный, и тогда $CL = EM$. Аналогично, точка K – середина отрезка CN. Тогда LK – средняя линия в треугольнике MCN, а значит, $2LK = MN$.

5) Докажем, что у пассажиров в сумме должно набраться не меньше 108 рублей. Представим себе, что платёж происходит следующим образом: все пассажиры сдают все свои деньги кондуктору, а затем он раздаёт всем положенную сдачу. Очевидно, можно считать, что каждый пассажир отдаёт монеты только одного типа, а получает лишь монеты другого типа. Действительно, если кто-то сдал, скажем, двухрублевую монету и получил назад двухрублевую монету, то её можно было не использовать, отчего общая сумма денег лишь уменьшится.

Предположим, что можно обойтись менее чем 108 рублями. Заметим, что у каждого пассажира имеется не менее 5 рублей, иначе он не сможет получить сдачу. Следовательно, если хотя бы у одного пассажира на руках не менее 13 рублей, то у всех пассажиров хотя бы $19 \cdot 5 + 13 = 108$ рублей. Значит, у каждого пассажира от 5 до 12 рублей. Поскольку пассажиры отдают монеты одного типа, а получают назад монеты другого типа, у пассажиров не могло быть 7, 9 или 11 рублей и они не могли получить в качестве сдачи 7, 9 или 11 рублей. Таким образом, у пассажиров могли находиться лишь: 5 рублей (сдача – $4 = 2 + 2$ рубля) или $6 = 2 + 2 + 2$ рублей (сдача – 5 рублей). Пусть k – число пассажиров с 6 рублями. Тогда всего имеется $3k$ монет по два рубля. Каждый из оставшихся $20 - k$ пассажиров должен получить на сдачу по 2 таких монеты. Следовательно, $2(20 - k) \leq 3k$, т. е. $k \geq 8$. Но тогда общая сумма $k \cdot 6 + (20 - k) \cdot 5 = 100 + k > 108$. Противоречие.

Приведём пример, когда пассажиры смогут обойтись суммой в 108 рублей. Пусть 12 пассажиров имеют по 5 рублей, а 8 пассажиров – по $2 + 2 + 2$ рублей. Тогда первые 12 возьмут себе в качестве сдачи по $2 + 2$ рубля (на это уйдут все 24 монеты по два рубля), а вторые 8 пассажиров возьмут сдачу по пять рублей. Оставшиеся 4 монеты по пять рублей останутся кондуктору в качестве оплаты за проезд.

Ответ: 108 рублей.