

11 класс, Вариант №1

Решения

1 Тормозить выгоднее, чем поворачивать, потому что тормозной путь окажется короче, чем радиус окружности траектории поворота. При торможении длина тормозного пути равна

$$S = \frac{V_0^2}{2a},$$

А при повороте - $S = \frac{V_0^2}{a}$.

2 Первой космической скоростью для некоторого сферического объекта называют скорость, необходимую для движения по окружности возле поверхности данного объекта.

$$F = ma,$$

$$\frac{V_1^2}{R_1} = \frac{GM}{R_1^2},$$

$$V_1^2 = \frac{GM}{R_1}.$$

V

Когда радиус уменьшится на столько, что первая космическая скорость станет скоростью света, получим:

$$c^2 = \frac{GM}{R}.$$

Откуда легко найти

$$R = R_1 \frac{V_1^2}{c^2} = 0,5 \text{ см.}$$

3 На поверхности земли период колебаний маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

На высоте h над землёй период колебаний маятника

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}.$$

Число колебаний за сутки $N_1 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 1/T_1 = k/T_1$. Следовательно, на высоте h над землёй часы отстанут за сутки на время

$$\Delta t_1 = N_1 (T_1 - T_0) = k \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right).$$

Воспользовавшись законом всемирного тяготения, запишем в следующем виде:

$$\Delta t_1 = k \left(1 - \sqrt{\frac{g_1}{g}} \right) = k \left(1 - \frac{R}{R+h} \right) = \frac{kh}{R+h} \approx \frac{kh}{R} \approx 2,7 \text{ с}$$

4 Отметим, на каких участках циклов тепло поступает в систему, а на каких теряется.

С введением этих обозначений можем записать для цикла 1-2-3-1:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Отсюда находим

$$Q_2 = (1 - \eta_1) Q_1.$$

В цикле 1-3-4-1 подведенное тепло равно Q_2 . КПД этого цикла

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2} = \frac{A_2}{(1 - \eta_1) Q_1};$$

КПД цикла 1-2-3-4-1

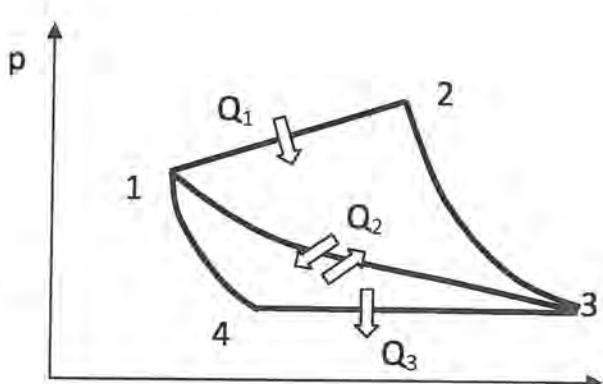
$$\eta_3 = \frac{A_1 + A_2}{Q_1} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2.$$

5. Покажем без формул, что изменение потенциальной энергии у шара меньше, чем у куба. Сила тяжести у куба и шара приложена к их центру масс, совпадающему с центром симметрии. Если бы центры их находились на одной высоте, то шар имел бы меньший объём, а значит, и массу. Но по условию задачи массы их одинаковы. Значит, диаметр шара должен быть несколько больше высоты ребра куба. Так как и куб, и шар стоят на полу, то центр шара будет расположен несколько выше центра куба. Но значит, на столько же он будет ниже у потолка. Отсюда можно заключить, что при подъеме шара от пола до соприкосновения с потолком будет произведена несколько меньшая работа. Поэтому шар у потолка приобретает меньшую потенциальную энергию, чем куб.

Теперь перейдем к числам. Легко заметить, что сторона куба 1 м, и он может подняться только на высоту $h = 2$ метра. При этом изменение потенциальной энергии куба:

$$\Delta E = mgh = 500 \cdot 10 \cdot 2 = 10^4 (\text{Дж}).$$

Объём шара вычисляется по формуле:



$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = m/\rho,$$

Откуда предельная высота поднятия:

$$h' = H - 2R = H - \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\rho}}.$$

Изменение потенциальной энергии шара:

$$\Delta E' = mgh = 500 \cdot 10 \cdot \left(3 - \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 500}{\pi \cdot 500}} \right) = 8,80 \cdot 10^3 (\text{Дж}).$$

Ответ: изменения потенциальной энергии для куба и шара равны, соответственно, 10,00 и 8,80 кДж.

11 класс, Вариант №2 Решения

1 Тормозить выгоднее, чем поворачивать, потому что тормозной путь окажется короче, чем радиус окружности траектории поворота. При торможении длина тормозного пути равна

$$S = \frac{V_0^2}{2a},$$

$$\text{А при повороте} - S = \frac{V_0^2}{a}.$$

2 Первой космической скоростью для некоторого сферического объекта называют скорость, необходимую для движения по окружности возле поверхности данного объекта.

$$F = ma,$$

$$\frac{V_1^2}{R_1} = \frac{GM}{R_1^2},$$

$$V_1^2 = \frac{GM}{R_1}.$$

V

Когда радиус уменьшится на столько, что первая космическая скорость станет скоростью света, получим:

$$c^2 = \frac{GM}{R}.$$

Откуда легко найти

$$R = R_1 \frac{V_1^2}{c^2} = 1,37 \text{ м.}$$

3 На поверхности земли период колебаний маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

На глубине h в шахте период колебаний маятника

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}.$$

Число колебаний за сутки $N_1 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 1/T_1 = k/T_1$. Следовательно, на глубине h в шахте часы отстанут за сутки на время

$$\Delta t_1 = N_1(T_1 - T_0) = k \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) = k \left(1 - \sqrt{\frac{g_1}{g}}\right).$$

Ускорение свободного падения у поверхности земли:

$$g = G \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{R^2}.$$

Ускорение свободного падения в шахте на глубине h :

$$g = G \frac{4}{3} \pi (R - h)^3 \rho \frac{1}{(R - h)^2}.$$

Тогда можем вычислить на сколько отстанут часы

$$\Delta t_1 = k \left(1 - \sqrt{\frac{g_1}{g}}\right) \approx \frac{kh}{2R} \approx 1,35 \text{ с}$$

4 Участки 4-1 и 2-3 – изохоры, участок 3-4 изобара, участки 1-2 и 2-4 представляют собой линейную зависимость от объёма. Отметим, на каких участках циклов тепло поступает в систему, а на каких теряется.

С введением этих обозначений можем записать для цикла 1-2-4-1:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1 + Q_3} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1 + Q_3},$$

Отсюда находим

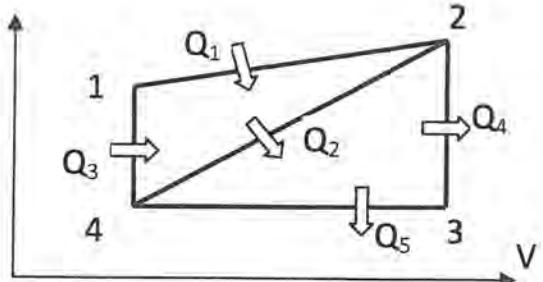
$$Q_2 = (1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3).$$

В цикле 2-3-4-2 подведенное тепло равно Q_2 . КПД этого цикла

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2} = \frac{A_2}{(1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)};$$

КПД цикла 1-2-3-4-1

$$\eta_3 = \frac{A_1 + A_2}{Q_1 + Q_3} = \frac{\eta_1(Q_1 + Q_3) + \eta_2(1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)}{Q_1 + Q_3} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2,$$



5 Покажем без формул, что изменение потенциальной энергии у шара меньше, чем у куба. Сила тяжести у куба и шара приложена к их центру масс, совпадающему с центром симметрии. Если бы центры их находились на одной высоте, то шар имел бы меньший объём, а значит, и массу. Но по условию задачи массы их одинаковы. Значит, диаметр шара должен быть несколько больше высоты ребра куба. Так как и куб, и шар стоят на полу, то центр шара будет расположен несколько выше центра куба. Но значит, на столько же он будет ниже у потолка. Отсюда можно заключить, что при подъеме шара от пола до соприкосновения с потолком будет произведена несколько меньшая работа. Поэтому шар у потолка приобретает меньшую потенциальную энергию, чем куб.

Теперь перейдем к числам. Легко заметить, что сторона куба 1 м, и он может подняться только на высоту $h = 2$ метра. При этом изменение потенциальной энергии куба:

$$\Delta E = mgh = 450 \cdot 10 \cdot 1,5 = 6750(\text{Дж}).$$

Объём шара вычисляется по формуле:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = m / \rho.$$

Откуда предельная высота поднятия:

$$h' = H - 2R = H - \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\rho}}.$$

Изменение потенциальной энергии шара:

$$\Delta E' = mgh' = 450 \cdot 10 \cdot \left(2,5 - \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 450}{\pi \cdot 450}} \right) = 5670(\text{Дж}).$$

Ответ: изменения потенциальной энергии для куба и шара равны, соответственно, 6750 и 5670 Дж.