

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

2020-2021 уч. года

Математика

9 класс

В варианте:

Должна стоять ровно одна из задач 9.6-1,2

Должна стоять ровно одна из задач 9.2-1,2 и 9.4-1,2

9.1-1. Найдите все значения y , для которых существуют положительные числа a, b, c такие, что $a + b + c = 4 - y^2$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 + 2y$.

9.1-2. Найдите все значения y , для которых существуют положительные числа a, b, c такие, что $a + b + c = 2 - y$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 - y^2 - y$.

9.2-1. Приведенный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a любой из этих корней, а коэффициент b удвоить, то полученный трехчлен будет иметь хотя бы один корень.

9.2-2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a любой из этих корней, умноженный на 2, а коэффициент b утроить, то полученный трехчлен будет иметь хотя бы один корень.

9.3. Ненулевые числа a, b и c таковы, что выполняются равенства $a^2(b + c - a) = b^2(a + c - b) = c^2(b + a - c)$. Какое наибольшее значение может принимать

выражение $\frac{2b + 3c}{a}$?

9.4-1. Известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет решений. Верно ли, что квадратное уравнение $(2a + c)x^2 + 3bx + (a + 2c) = 0$ также не имеет решений?

9.4-2. Известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет решений. Верно ли, что квадратное уравнение $(a + 3c)x^2 + 4bx + (3a + c) = 0$ также не имеет решений?

9.5. Существует ли тринадцать последовательных натуральных чисел таких, что их сумма является 2021 степенью натурального числа?

9.6-1. На данной окружности ω выбраны точки A , B и C так, что угол ABC равен 70° . Пусть D – точка пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью ω , а точка K симметрична точке A относительно точки D . Прямая KC вторично пересекает окружность в точке P ($P \neq C$, точка C лежит на отрезке KP). Найдите угол ADP .

9.6-2. На данной окружности ω выбраны точки A , B и C так, что угол ABC равен 65° . Пусть D – точка пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью ω , а точка K симметрична точке A относительно точки D . Прямая KC вторично пересекает окружность в точке P ($P \neq C$, точка C лежит на отрезке KP). Найдите угол ADP .