21-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

9 класс

9.1-1. Дан правильный 60-угольник. В нем провели все диагонали, соединяющие вершины, между которыми не более 19 других вершин. Сколько равнобедренных треугольников нарисовано? (Сторонами равнобедренного треугольника могут быть стороны и проведенные диагонали данного правильного многоугольника.)

9.1-2. Дан правильный 90-угольник. В нем провели все диагонали, соединяющие вершины, между которыми не более 29 других вершин. Сколько равнобедренных треугольников нарисовано? (Сторонами равнобедренного треугольника могут быть стороны и проведенные диагонали данного правильного многоугольника.)

9.2-1. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,04. Какое наибольшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи, если в классе было меньше 30 учеников?

9.2-2. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,02. Какое наибольшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи, если в классе было меньше 30 учеников?

9.3-1. Известно, что $a+b+c=3$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $a^2-3b+2c$, $b^2-3c+2a$, $c^2-3a+2b$ неотрицательно.

9.3-2. Известно, что $a+b+c=6$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $a^2-5b+3c$, $b^2-5c+3a$, $c^2-5a+3b$ неотрицательно.

9.4-1. Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle ABC$.

9.4-2. Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle DOE$.