

ВАРИАНТ 13. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 5$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.
2. [5 баллов] На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 477. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 477. Какие числа могли быть написаны на доске?
3. [6 баллов] На плоскости Oxy даны точка A , координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B , заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y = 1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).
4. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

5. [5 баллов] У фокусника есть набор из 12^2 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 12. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?
6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .
 - а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.
 - б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 3$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

ВАРИАНТ 14. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 11$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.
2. [5 баллов] На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 30 раз, то сумма чисел на доске станет равной 450. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 450. Какие числа могли быть написаны на доске?
3. [6 баллов] На плоскости Oxy даны точка A , координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B , заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $x = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).
4. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 3x^2y^2 = 7, \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 37. \end{cases}$$

5. [5 баллов] У фокусника есть набор из 15^2 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 15. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?
6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .
 - а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.
 - б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 4$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

ВАРИАНТ 15. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 1$, $EN = 7$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.
2. [5 баллов] На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 581. Если же самое большое число увеличить в 17 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 581. Какие числа могли быть написаны на доске?
3. [6 баллов] На плоскости Oxy даны точка A , координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B , заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 4ay + a^4 + 4 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y = 1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).
4. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 31. \end{cases}$$

5. [5 баллов] У фокусника есть набор из 20^2 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 20. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?
6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .
 - а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.
 - б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 4$, $AD = 5$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

ВАРИАНТ 16. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 1$, $EN = 4$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.
2. [5 баллов] На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 35 раз, то сумма чисел на доске станет равной 592. Если же самое большое число увеличить в 16 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 592. Какие числа могли быть написаны на доске?
3. [6 баллов] На плоскости Oxy даны точка A , координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B , заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $x = 3$ (точки A и B не лежат на этой прямой).
4. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 = 19. \end{cases}$$

5. [5 баллов] У фокусника есть набор из 16^2 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 16. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?
6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .
 - а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.
 - б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 5$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.