Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

2020-2021 уч. года

Математика

11 класс

В варианте:

Должна стоять ровно одна задача из 11.2-1,2 и 1.3-1,2

Должна стоять ровно одна задача из 11.1-1,2 и 11.6

Должна стоять ровно одна задача из 11.4-1,2 и 11.7-1,2

11.1-1. При каком наибольшем n существуют положительные числа $x_1, x_2, \boxed{?}, x_n$ такие, что $x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n = 25$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \boxed{?} + \frac{1}{x_n} = 1$?

11.1-2. При каком наибольшем n существуют положительные числа $x_1, x_2, \boxed{?}, x_n$ такие, что $x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n = 1$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \boxed{?} + \frac{1}{x_n} = 36$?

11.2-1. В остроугольном треугольнике ABC разность углов при вершинах A и B равна 20° (угол A больше угла B). Пусть CH – высота треугольника ABC. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Прямая CH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ACP, в точке K. Прямая KP пересекает отрезок AB в точке M. Найдите угол BCM.

11.2-2. В остроугольном треугольнике ABC разность углов при вершинах A и B равна 25° (угол A больше угла B). Пусть CH – высота треугольника ABC. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Прямая CH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ACP, в точке K. Прямая KP пересекает отрезок AB в точке M. Найдите угол BCM.

11.3-1. По одну сторону от плоскости α расположены точки *A*, *B*, *C*, по другую – точка *D*. Известно, что *ABCD* – параллелограмм, и расстояния от точек *A*, *B* и *C* до плоскости α равны, соответственно, 1, 5 и 3. Найдите расстояние от точки *D* до этой плоскости.

11.3-2. По одну сторону от плоскости α расположены точки *A*, *B*, *C*, по другую – точка *D*. Известно, что *ABCD* – параллелограмм, и расстояния от точек *A*, *B* и *C* до плоскости α равны, соответственно, 2, 7 и 3. Найдите расстояние от точки *D* до этой плоскости.

11.4-1. Известно, что три натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию с разностью 10, являются делителями некоторого нечетного натурального числа *N*, причем первый член прогрессии является наименьшим делителем числа *N*, отличным от 1. Докажите, что *N* делится на 897.

11.4-2. Известно, что три натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию с разностью 14, являются делителями некоторого нечетного натурального числа *N*, причем первый член прогрессии является наименьшим делителем числа *N*, отличным от 1. Докажите, что *N* делится на 1581.

11.5. В одной тетради Вася записал 11 натуральных чисел. В другую тетрадь Петя записал наибольшие общие делители каждой пары чисел, записанных в васиной тетради. Оказалось, что каждое число, записанное в одной из двух тетрадей, есть и в другой тетради. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано в васиной тетради?

11.6. В шахматном турнире участвовали одиннадцатиклассники и десятиклассники. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, и они набрали в 4,5 раза больше очков, чем десятиклассники. Ученик какого класса стал победителем турнира, и сколько очков он набрал? В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков.

11.7-1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(0)\cdot P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)$ оканчиваться на 1010?

11.7-2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(2)\cdot P(3)\cdot P(4)\cdot P(5)$ оканчиваться на 2030?

11.8. Даны действительные числа $a_1, a_2, \boxed{?}, a_7$ такие, что $a_1 = a_7 = 0$. Верно ли, что всегда можно выбрать индекс $k \le 5$ так, что будет выполняться неравенство $a_k + a_{k+2} \le a_{k+1}\sqrt{3}$?