

ВАРИАНТ 17

1. [5 баллов] S – сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{12} > S + 1$, $a_7 a_{11} < S + 17$. Укажите все возможные значения a_1 .
2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?
3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x; y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq \min(2a + 2b; 2). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?
6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 4.
 - а) Найдите площадь треугольника ABC .
 - б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{7}{5}$. Найдите AC .

ВАРИАНТ 18

1. [5 баллов] S – сумма первых 7 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_7 a_{12} > S + 20$, $a_9 a_{10} < S + 44$. Укажите все возможные значения a_1 .

2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 5, \\ a^2 + b^2 \leq \min(4a - 2b; 5). \end{cases}$$

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 15, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x - 14)$, $\log_{6x-14}(x - 1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3} + 3\right)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 5.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{1}{2}$. Найдите AC .

Найдите площадь фигуры M .

ВАРИАНТ 19

1. [5 баллов] S – сумма первых 14 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_9 a_{17} > S + 12$, $a_{11} a_{15} < S + 47$. Укажите все возможные значения a_1 .

2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 6$, $AD = DB = 7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 25, \\ a^2 + b^2 \leq \min(-8a - 6b; 25). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 21, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2} \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}} \left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 10 и 6.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg 2$. Найдите AC .

ВАРИАНТ 20

1. [5 баллов] S – сумма первых 5 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{11} > S + 15$, $a_9 a_8 < S + 39$. Укажите все возможные значения a_1 .

2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 7$, $AD = DB = 8$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 13, \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b; 13). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 10, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 10 и 8.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{1}{2}$. Найдите AC .

ВАРИАНТ 21

1. [5 баллов] S – сумма первых 7 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_8 a_{17} > S + 27$, $a_{11} a_{14} < S + 60$. Укажите все возможные значения a_1 .
2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 4$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?
3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 20, \\ a^2 + b^2 \leq \min(8a - 4b; 20). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 35, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?
6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A , O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 12 и 9.
 - а) Найдите площадь треугольника ABC .
 - б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{3}{7}$. Найдите AC .

ВАРИАНТ 22

1. [5 баллов] S – сумма первых 15 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_7 a_{16} > S - 24$, $a_{11} a_{12} < S + 4$. Укажите все возможные значения a_1 .

2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 4$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 50, \\ a^2 + b^2 \leq \min(14a + 2b; 50). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 14, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2} \left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}} \left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}} \left(\frac{x}{2} + 1\right)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 7 и 5.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{3}{4}$. Найдите AC .

ВАРИАНТ 23

1. [5 баллов] S – сумма первых 6 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_{10}a_{16} > S + 39$, $a_{11}a_{15} < S + 55$. Укажите все возможные значения a_1 .

2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 4$, $AC = CB = 6$, $AD = DB = 7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 8, \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a + 4b; 8). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 22, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 15 и 13.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{4}{7}$. Найдите AC .

ВАРИАНТ 24

1. [5 баллов] S – сумма первых 9 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_5 a_{18} > S - 4$, $a_{13} a_{10} < S + 60$. Укажите все возможные значения a_1 .

2. [5 баллов] Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 4$, $AC = CB = 7$, $AD = DB = 8$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

3. [7 баллов] Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 10, \\ a^2 + b^2 \leq \min(-6a - 2b; 10). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. [5 баллов] Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 33, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Даны числа $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7} + 7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29 - x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x - 1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

6. [7 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 16 и 14.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{3}{5}$. Найдите AC .