Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

2020-2021 уч. года

Математика

10 класс

В варианте:

Должна стоять ровно одна задача из 10.3-1, 10.3-2, 10.4

Должна стоять ровно одна задача из 10.6-1,2 и 10.2

Должна стоять ровно одна задача из 10.1-1,2 и 10.5

10.1-1. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что $x_1+x_2+x_3+x_4=5-\sqrt{y+1}$ и $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=4-\sqrt{y}$.

10.1-2. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 такие, что $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7-\sqrt{y+4}$ и $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}=5-\sqrt{y}$.

10.2. Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, …, 10 с цифрой 9. Из всех эти карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, чт одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральны множителя, больших единицы.

10.3-1. Пусть B и C – точки пересечения двух окружностей равных радиусов. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC=CE$. Найдите угол CEA, если угол CDB равен 50°.

10.3-2. Пусть B и C – точки пересечения двух окружностей равных радиусов. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC=CE$. Найдите угол CEA, если угол CDB равен 40°.

10.4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне BC, проведенный через ее середину – точку M, пересекает сторону AB в точке K. Окружность с диаметром KC пересекает отрезок CD в точке P ($P \neq C$). Найдите угол между прямыми MP и AD.

10.5. В шахматном турнире участвовали десятиклассники и девятиклассники. Десятиклассников было в 9 раз больше, и они набрали в 4 раза больше очков, чем девятиклассники. Ученик какого класса стал победителем турнира, и сколько очков он набрал? В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков.

10.6-1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(0) \cdot P(1)$ оканчиваться на 4321?

10.6-2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(1) \cdot P(2)$ оканчиваться на 2021?