

# 21-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

## Математика

### 10 класс

**10.1-1.** На полуокружности равномерно отметили 200 точек (расстояние между любыми двумя соседними точками равны). Любые две точки, между которыми не более 19 точек, соединили отрезком. Сколько равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках нарисовано?

**10.1-2.** На полуокружности равномерно отметили 210 точек (расстояние между любыми двумя соседними точками равны). Любые две точки, между которыми не более 17 точек, соединили отрезком. Сколько равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках нарисовано?

**10.2-1.** Задано 4 натуральных числа  $a, b, c, d$ . На доску в некотором порядке написали 6 чисел – попарные суммы чисел  $a, b, c, d$ . Оказалось, что первое число на доске делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 8, пятое – на 9 и шестое на 10. Может ли сумма  $a+b+c+d$  оказаться простым числом?

**10.2-2.** Задано 4 натуральных числа  $a, b, c, d$ . На доску в некотором порядке написали 6 чисел – попарные суммы чисел  $a, b, c, d$ . Оказалось, что первое число на доске делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 10, пятое – на 11 и шестое на 12. Может ли сумма  $a+b+c+d$  оказаться простым числом?

**10.3-1.** Дана парабола  $y = 6x^2$ . На параболе выбраны четыре точки  $A, B, C, D$  так, что углы  $AOB$  и  $COD$  – прямые ( $O$  – начало координат). Отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $OP$ .

**10.3-2.** Дана парабола  $y = 11x^2$ . На параболе выбраны четыре точки  $A, B, C, D$  так, что углы  $AOB$  и  $COD$  – прямые ( $O$  – начало координат). Отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $OP$ .

**10.4-1.** На основании  $AC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $ABD$  и  $CBD$  в два раза больше длины  $AC$ . Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $DB$ .

**10.4-2.** На основании  $AC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $ABD$  и  $CBD$  в три раза больше длины  $AC$ . Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $DB$ .