10 класс

11. Окружность, центр которой расположен в первой координатной четверти, касается оси Ox в точке M, пересекает две гиперболы $y = \frac{k_1}{x}$ и $y = \frac{k_2}{x}$ ($k_1, k_2 > 0$) в точках A и B таких, что прямая AB проходит через начало координат O. Известно, что param1. Найдите **наименьшую** возможную длину отрезка OM.

param1	Ответ
$k_1k_2 = 2{,}25$	
$k_1k_2 = 6{,}25$	
$k_1k_2 = 12{,}25$	
$k_1k_2 = 20{,}25$	
$k_1k_2 = 30{,}25$	

12. У Олега есть кубики двух цветов – красного и синего. Он строит из них башню, ставя каждый следующий кубик на предыдущий. Запрещено использовать более param1 кубиков красного цвета и более param2 кубиков синего цвета. Олег заканчивает строить башню, как только в ней окажется либо param1 кубиков красного цвета, либо param2 кубиков синего цвета. Сколько различных башен может построить Олег?

param1	param2	Ответ
10	11	
9	11	
8	12	
13	7	
14	9	

13. Через центр O окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведена прямая, параллельная ВС и пересекающая стороны AB и AC точках B_1 и C_1 соответственно. Окружность ω проходит через точки B_1, C_1 и касается Ω в точке K. Найдите радиус окружности Ω, если param1. В ответ запишите квадрат радиуса.

param1	Ответ
$B_1C_1 = 6,\ AK = 6$, а расстояние между прямыми BC и B_1C_1 равно 2	
$BC = 9,\ AK = 8,\ B_1C_1 = 6$	
$B_1C_1 = 6,\ AK = 6$, а расстояние между прямыми BC и B_1C_1 равно 1	
$BC = 8,\ AK = 5,\ B_1C_1 = 5$	

14. Отмечены вершины сторон правильного param1-угольника, а также по две различные точки на каждой стороне этого param1-угольника, отличных от вершин (то есть всего отмечено param2). Сколько существует выпуклых четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

param1	param2	Ответ
6	18 точек	
7	21 точка	
8	24 точки	
9	27 точек	
10	30 точек	

15. На отрезке $[10; 20]$ выбраны натуральные числа param1 такие, что param2. Найдите **максимальное** значение выражения param3.

param1	param2	param3	Ответ
$a_1,\ldots,a_{18}$	$a_1+\ldots+a_{18}=237$	$a_1^2+\ldots+a_{18}^2$	
$a_1,\ldots,a_{20}$	$a_1+\ldots+a_{20}=285$	$a_1^2+\ldots+a_{20}^2$	
$a_1,\ldots,a_{22}$	$a_1+\ldots+a_{22}=375$	$a_1^2+\ldots+a_{22}^2$	
$a_1,\ldots,a_{24}$	$a_1+\ldots+a_{24}=351$	$a_1^2+\ldots+a_{24}^2$	
$a_1,\ldots,a_{26}$	$a_1+\ldots+a_{26}=428$	$a_1^2+\ldots+a_{26}^2$	

16. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Из точек A и C проведены касательные AK и CT к окружности, построенной на отрезке BH как на диаметре. Пусть param1 и param2 – длины этих касательных. Каково **наибольшее** возможное значение длины стороны AC? В ответ запишите квадрат длины AC.

param1	param2	Ответ
5	6	
4	7	
5	7	
3	5	
5	9	

17. Медиана AM и высота BH треугольника ABC (H – на стороне AC) пересекаются в точке P. Какое **наибольшее** значение может принимать PH, если $AM = BH =$ param1,

$MN =$ param2, где N – точка пересечения продолжения AM с окружностью, описанной около треугольника ABC ?

param1	param2	Ответ
24	14	
25	13	
64	43	
64	19	
25	7	

18. Последовательность задана формулой $x_{n+1} = param1 x_n + \sqrt{(param1^2 - 1)x_n^2 + param2}$. Известно, что $x_{2018} + x_{2022} = param3$. Найдите x_{2020}.

param1	param2	param3	Ответ:
2	2	98	
2	3	70	
3	2	102	
3	2	170	
4	2	62	

19. Пять неотрицательных чисел таковы, что их сумма равна param1, а сумма их квадратов равна param2. Какое **наименьшее** значение может иметь **самое маленькое** из этих чисел?

param1	param2	Ответ
15	48,2	
13	38,8	
12	32	
11	27,4	
14	46,4	

20. Даны неотрицательные целые числа a, b такие, что param1 делится на param2. Найдите **минимальное** возможное значение $a+b$.

param1	param2	Ответ
$24^a \cdot 18^b$	6^{200}	
$54^a \cdot 144^b$	6^{200}	
$324^a \cdot 48^b$	6^{140}	
$54^a \cdot 96^b$	6^{140}	
$108^a \cdot 288^b$	6^{440}	