

ВАРИАНТ 9. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найдите площадь треугольника ABC .

2. [6 баллов] Решите уравнение $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$.

3. [6 баллов] На плоскости Oxy уравнением $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ заданы координаты точки A , а уравнением $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$ – парабола с вершиной в точке B . Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

4. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

5. [5 баллов] На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 59)$, $(59; 59)$ и $(59; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 59 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

ВАРИАНТ 10. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2. [6 баллов] Решите уравнение $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$.

3. [6 баллов] На плоскости Oxy уравнением $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$ заданы координаты точки A , а уравнением $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$ – парабола с вершиной в точке B . Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по одну сторону от прямой $2x - y = 5$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

4. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10, \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81. \end{cases}$$

5. [5 баллов] На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 69)$, $(69; 69)$ и $(69; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 69 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

ВАРИАНТ 11. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 2$, $BD = \sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2. [6 баллов] Решите уравнение $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$.

3. [6 баллов] На плоскости Oxy уравнением $5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ заданы координаты точки A , а уравнением $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$ – парабола с вершиной в точке B . Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y - 3x = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

4. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20. \end{cases}$$

5. [5 баллов] На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 65)$, $(65; 65)$ и $(65; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 65 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 5$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

ВАРИАНТ 12. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2. [6 баллов] Решите уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$.

3. [6 баллов] На плоскости Oxy уравнением $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ заданы координаты точки A , а уравнением $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ – парабола с вершиной в точке B . Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по одну сторону от прямой $x + y = 3$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

4. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}, \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

5. [5 баллов] На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 63)$, $(63; 63)$ и $(63; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 63 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 4$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.