Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

2020-2021 уч. года

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи в соответствии с вариантами замены.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:

– правильное решение – 7 баллов;

– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;

– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;

– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;

– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2 – 3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что ответы в каждой задаче требуют объяснения.

9 класс

В варианте:

Должна стоять ровно одна из задач 9.6-1,2

Должна стоять ровно одна из задач 9.2-1,2 и 9.4-1,2

9.1-1. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа a, b, c такие, что $a+b+c=4-y^2$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+2y$.

Ответ. 1.

Решение. Сложив равенства, получим $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5-y^2+2y$.

Заметим, что $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$ так как $t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$, причем неравенство обращается в равенство только при $a=b=c=1$.

Также заметим, что $5-y^2+2y=6-(y-1)^2\leq 6$, причем неравенство обращается в равенство только при $y=1$.

Значит, единственный возможный случай, это $y=1$ (при $a=b=c=1$).

При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

9.1-2. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа a, b, c такие, что $a+b+c=2-y$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3-y^2-y$.

Ответ. –1.

Решение. Сложив равенства, получим $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5-y^2-2y$.

Заметим, что $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$ так как $t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$, причем неравенство обращается в равенство только при $a=b=c=1$.

Также заметим, что $5 - y^2 - 2y = 6 - (y+1)^2 \le 6$, причем неравенство обращается в равенство только при $y = -1$.

Значит, единственный возможный случай, это $y = -1$ (при $a = b = c = 1$).

При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

9.2-1. Приведенный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента *a* любой из этих корней, а коэффициент *b* удвоить, то полученный трехчлен будет иметь хотя бы один корень.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни трехчлена $f(x)$. Тогда получившийся трехчлен имеет вид $f_1(x) = x^2 - (2x_1 + x_2)x + 2x_1x_2$. Его дискриминант $D = (2x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot 2x_1x_2 = (2x_1 - x_2)^2 \ge 0$, что и требовалось.

Комментарий. Получено неравенство $D > 0$ вместо $D \ge 0$ – снять 1 балл.

9.2-2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента *a* любой из этих корней, умноженный на 2, а коэффициент *b* утроить, то полученный трехчлен будет иметь хотя бы один корень.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни трехчлена $f(x)$. Тогда получившийся трехчлен имеет вид $f_1(x) = x^2 - (3x_1 + x_2)x + 3x_1x_2$. Его дискриминант $D = (3x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot 3x_1x_2 = (3x_1 - x_2)^2 \ge 0$, что и требовалось.

Комментарий. Получено неравенство $D > 0$ вместо $D \ge 0$ – снять 1 балл.

9.3. Ненулевые числа *a, b* и *c* таковы, что выполняются равенства $a^2(b+c-a) = b^2(a+c-b) = c^2(b+a-c)$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\dfrac{2b+3c}{a}$?

Ответ. 5.

Решение. Приравняв первое и второе выражение, после преобразования получим: $(a-b)(a^2+b^2-ac-bc)=0$. Аналогично получим равенства $(b-c)(b^2+c^2-ab-ac)=0$ и $(a-c)(a^2+c^2-ab-cb)=0$.

Докажем, что $a=b=c$.

Предположим, что $a=b\neq c$. Тогда из второго равенства получаем: $0=b^2+c^2-ab-ac=b^2+c^2-b^2-bc=c^2-bc$, откуда $b=c$ (так как $c\neq 0$). Противоречие.

Значит, либо числа попарно различны, либо они все равны между собой.

Предположим, что числа попарно различны, тогда $a^2+b^2-ac-bc=0$, $b^2+c^2-ab-ac=0$ и $a^2+c^2-ab-cb=0$. Сложив эти равенства, получим $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, откуда $a=b=c$. Противоречие.

Значит, единственный возможный случай, это $a=b=c$. Но тогда $\frac{2b+3c}{a}=\frac{2a+3a}{a}=5$.

Комментарий. Верный ответ получен рассмотрением частного случая – 1 балл.

Утверждается, что $a=b=c$, но это утверждение не доказано – баллы не добавляются.

9.4-1. Известно, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений. Верно ли, что квадратное уравнение $(2a+c)x^2+3bx+(a+2c)=0$ также не имеет решений?

Ответ. Верно.

Решение. Заметим, что если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то и квадратное уравнение $cx^2+bx+a=0$ не имеет решений, так как у этих уравнений одинаковые дискриминанты. При этом, если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то знаки коэффициентов *a* и *c* будут одинаковы (в противном случае дискриминант будет неотрицательным). Это означает, что графики квадратичных функций $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$ либо одновременно лежат выше оси *Ox*, либо одновременно ниже оси *Ox*. Но тогда и график суммы $h(x)=2f(x)+g(x)=(2a+c)x^2+3bx+(a+2c)$ также не пересекает ось *Ox*.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.4-2. Известно, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений. Верно ли, что квадратное уравнение $(a+3c)x^2+4bx+(3a+c)=0$ также не имеет решений?

Ответ. Верно.

Решение. Заметим, что если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то и квадратное уравнение $cx^2+bx+a=0$ не имеет решений, так как у этих уравнений одинаковые дискриминанты. При этом, если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то знаки коэффициентов *a* и *c* будут одинаковы (в противном случае дискриминант будет неотрицательным). Это означает, что графики квадратичных функций $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$ либо одновременно лежат выше оси *Ox*, либо одновременно ниже оси *Ox*. Но тогда и график суммы $h(x)=f(x)+3g(x)=(a+3c)x^2+4bx+(3a+c)$ также не пересекает ось *Ox*.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.5. Существует ли тринадцать последовательных натуральных чисел таких, что их сумма является 2021 степенью натурального числа?

Ответ. Существуют.

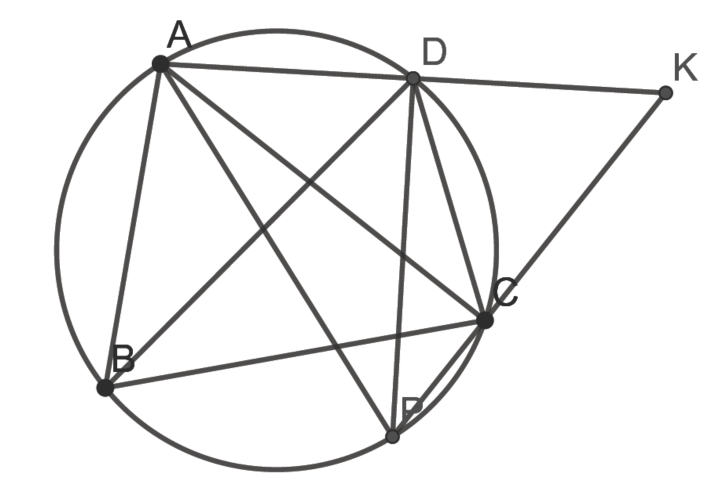
Решение. Обозначим 13 последовательных чисел $N-6, N-5, \boxed{?}, N+5, N+6$. Тогда их сумма равна $13N$. Если $N=13^{2020}$, то сумма будет равна $13N=13\cdot 13^{2020}=13^{2021}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.6-1. На данной окружности ω выбраны точки *A*, *B* и *C* так, что угол *ABC* равен 70°. Пусть *D* – точка пересечения биссектрисы угла *ABC* с окружностью ω, а точка *K* симметрична точке *A* относительно точки *D*. Прямая *KC* вторично пересекает окружность в точке *P* ($P\neq C$, точка *C* лежит на отрезке *KP*). Найдите угол *ADP*.

Ответ. 90°.

Решение. Докажем, что *PD* – перпендикуляр к *AK*. $AD=DK$, значит, нам нужно доказать, что $\alpha=\angle APD=\beta=\angle KPD$. Но $\alpha=\angle APD=\angle ABD$ (вписанные, опираются на дугу *AD*), $\beta=\angle CPD=\angle CBD$ (вписанные, опираются на дугу *CD*). Наконец, $\angle ABD=\angle CBD$, так как *BD* – биссектриса $\angle ABC$. Утверждение доказано.

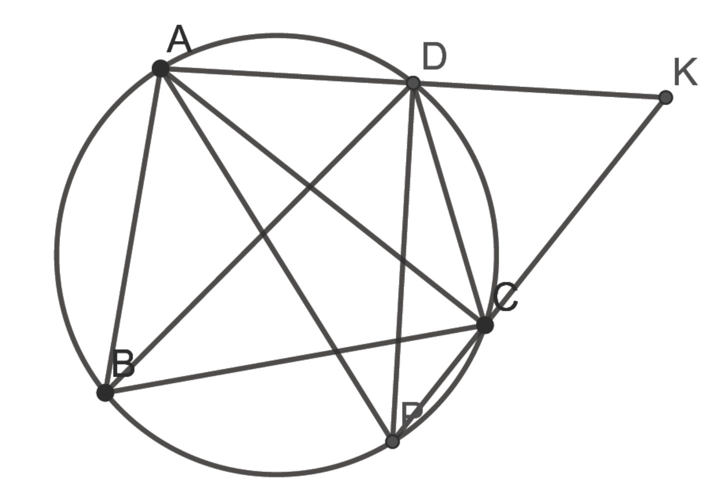


Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.6-2. На данной окружности ω выбраны точки A, B и C так, что угол ABC равен 65°. Пусть D – точка пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью ω, а точка K симметрична точке A относительно точки D. Прямая KC вторично пересекает окружность в точке P ($P \neq C$, точка C лежит на отрезке KP). Найдите угол ADP.

Ответ. 90°.

Решение. Докажем, что PD – перпендикуляр к AK. $AD = DK$, значит, нам нужно доказать, что $\alpha = \angle APD = \beta = \angle KPD$. Но $\alpha = \angle APD = \angle ABD$ (вписанные, опираются на дугу AD), $\beta = \angle CPD = \angle CBD$ (вписанные, опираются на дугу CD). Наконец, $\angle ABD = \angle CBD$, так как BD – биссектриса $\angle ABC$. Утверждение доказано.



Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.