21-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.
Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:
– правильное решение – 7 баллов;
– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2-3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

9 класс

9.1-1. Дан правильный 60-угольник. В нем провели все диагонали, соединяющие вершины, между которыми не более 19 других вершин. Сколько равнобедренных треугольников нарисовано? (Сторонами равнобедренного треугольника могут быть стороны и проведенные диагонали данного правильного многоугольника.)
Ответ. 620.
Решение. Посчитаем основания равнобедренных треугольников, которые не содержат центр многоугольника. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек, то есть 19, 17, 15, …, 1. Отрезков каждого вида ровно 60. Поэтому таких треугольников $60 \cdot 10 = 600$. Также возможен случай, когда треугольник содержит центр многоугольника. Это возможно только если между вершинами лежит ровно по 19 точек, и такие треугольники будут равносторонними. Их количество равно 20. Итого получаем 620 треугольников.
9.1-2. Дан правильный 90-угольник. В нем провели все диагонали, соединяющие вершины, между которыми не более 29 других вершин. Сколько равнобедренных треугольников нарисовано? (Сторонами равнобедренного треугольника могут быть стороны и проведенные диагонали данного правильного многоугольника.)
Ответ. 1380.
Решение. Посчитаем основания равнобедренных треугольников, которые не содержат центр многоугольника. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек, то есть 29, 27, 25, …, 1. Отрезков каждого вида ровно 90. Поэтому таких треугольников $90 \cdot 15 = 1350$. Также возможен случай, когда треугольник содержит центр многоугольника. Это возможно только если между вершинами лежит ровно по 29 точек, и такие треугольники будут равносторонними. Их количество равно 30. Итого получаем 1380 треугольников.
Комментарий. Не учтены равносторонние треугольники – снять 3 балла.

9.2-1. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,04. Какое наибольшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи, если в классе было меньше 30 учеников?

Ответ. 25.

Решение. Пусть в классе было x учеников, их суммарный балл по алгебре равнялся S, а Васина оценка по алгебре A. Тогда $\frac{S+A}{x+1} - \frac{S}{x} = \frac{1}{25}$. Отсюда $\frac{Ax-S}{x(x+1)} = \frac{1}{25}$, то есть $x(x+1) = 25(Ax-S)$. Значит, $x(x+1)$ делится на $25 = 5^2$. Числа x и $x+1$ взаимно простые, поэтому либо x, либо $x+1$ делится на 25. Значит, в классе было либо 24, либо 25 учеников.
Покажем, что в классе могло быть 25 учеников. Пусть $S = 99, A = 5, x = 25$, тогда $\frac{S+A}{x+1} - \frac{S}{x} = \frac{104}{26} - \frac{99}{25} = \frac{1}{25}$.

9.2-2. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,02. Какое наибольшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи, если в классе было меньше 30 учеников?

Ответ. 25.

Решение. Пусть в классе было x учеников, их суммарный балл по алгебре равнялся S, а Васина оценка по алгебре A. Тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{1}{50}$. Отсюда $\frac{Ax-S}{x(x+1)}=\frac{1}{50}$, то есть $x(x+1)=50(Ax-S)$. Значит, $x(x+1)$ делится на $25=5^2$. Числа x и $x+1$ взаимно простые, поэтому либо x, либо $x+1$ делится на 25. Значит, в классе было либо 24, либо 25 учеников.
Покажем, что в классе могло быть 25 учеников. Пусть $S=112, A=5, x=25$, тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{117}{26}-\frac{112}{25}=\frac{1}{50}$.

Комментарий. Доказано, что учеников было не больше 25 – 4 балла.
Приведен пример с 25 учениками – 3 балла.

9.3-1. Известно, что $a+b+c=3$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $a^2-3b+2c$, $b^2-3c+2a$, $c^2-3a+2b$ неотрицательно.
Решение.
Рассмотрим сумму трех чисел. Она равна
$a^2-b+b^2-c+c^2-a-(a+b+c)+(a+b+c)=a^2-2a+b^2-2b+c^2-2c+3=$
$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$. Поэтому по крайней мере одно из чисел неотрицательно.

9.3-2. Известно, что $a+b+c=6$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $a^2-5b+3c$, $b^2-5c+3a$, $c^2-5a+3b$ неотрицательно.
Решение.
Рассмотрим сумму трех чисел. Она равна
$a^2-2b+b^2-2c+c^2-2a-2(a+b+c)+2(a+b+c)=a^2-4a+b^2-4b+c^2-4c+12=$
$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\geq 0$. Поэтому по крайней мере одно из чисел неотрицательно.

Комментарий. Записано строгое неравенство вместо нестрогого – 6 баллов.

9.4-1. Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle ABC$.
Ответ. $\angle ABC=60°$.

Решение. Заметим, что точки D и E – середины дуг BC и AB, поэтому отрезки OD и OE перпендикулярны сторонам BC и AB соответственно. Тогда $\angle DOE=180°-\gamma$, где $\gamma=\angle ABC$. Но мы знаем, что $\angle EID=90°+\frac{1}{2}\gamma$, как угол между биссектрисами треугольника. Кроме того, из условия расположения точек на одной окружности следует, что $\angle DOE=\angle DIE$. Отсюда $180°-\gamma=90°+\frac{1}{2}\gamma$, т.е. $\gamma=60°$. То есть $\angle ABC=60°$.

9.4-2. Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle DOE$.

Ответ. $\angle DOE = 120°$.

Решение. Заметим, что точки D и E – середины дуг BC и AB, поэтому отрезки OD и OE перпендикулярны сторонам BC и AB соответственно. Тогда $\angle DOE = 180° - \gamma$, где $\gamma = \angle ABC$. Но мы знаем, что $\angle EID = 90° + \frac{1}{2}\gamma$, как угол между биссектрисами треугольника. Кроме того, из условия расположения точек на одной окружности следует, что $\angle DOE = \angle DIE$. Отсюда $180° - \gamma = 90° + \frac{1}{2}\gamma$, т.е. $\gamma = 60°$. То есть $\angle DOE = 120°$.

Комментарий. Записана связь между углами *EID* и *ABC* – 2 балла.