

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

2020-2021 уч. года

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи в соответствии с вариантами замены.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:

- правильное решение – 7 баллов;
- решение с недочетами – 5 – 6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2 – 3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что ответы в каждой задаче требуют объяснения.

11 класс

В варианте:

Должна стоять ровно одна задача из 11.2-1,2 и 1.3-1,2

Должна стоять ровно одна задача из 11.1-1,2 и 11.6

Должна стоять ровно одна задача из 11.4-1,2 и 11.7-1,2

11.1-1. При каком наибольшем n существуют положительные числа $x_1, x_2, \boxed{?}, x_n$ такие, что $x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n = 25$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \boxed{?} + \frac{1}{x_n} = 1$?

Ответ. 5.

Решение. Перемножив равенства, получим

$$25 = (x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \boxed{?} + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{x_1}{x_1} + \boxed{?} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_n} + \boxed{?} \frac{x_n}{x_n} =$$

$$= n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) + \boxed{?} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) \geq n + 2C_n^2 = n^2, \quad \frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2 \sqrt{\frac{x_i}{x_j} \cdot \frac{x_j}{x_i}} = 2,$$

, так как

Поэтому $n^2 \leq 25 \Rightarrow n \leq 5$.

Осталось заметить, что при $n = 5$ подойдут числа $x_1 = x_2 = \boxed{?} = x_5 = 5$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Только оценка – 5 баллов.

Только пример – 2 балла.

11.1-2. При каком наибольшем n существуют положительные числа $x_1, x_2, \boxed{?}, x_n$ такие, что $x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n = 1$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \boxed{?} + \frac{1}{x_n} = 36$?

Ответ. 6.

Решение. Перемножив равенства, получим

$$36 = (x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \boxed{?} + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{x_1}{x_1} + \boxed{?} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_n} + \boxed{?} \frac{x_n}{x_n} =$$

$$= n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) + \boxed{?} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) \geq n + 2C_n^2 = n^2, \quad \frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2 \sqrt{\frac{x_i}{x_j} \cdot \frac{x_j}{x_i}} = 2,$$

, так как

Поэтому $n^2 \leq 36 \Rightarrow n \leq 6$.

Осталось заметить, что при $n = 6$ подойдут числа $x_1 = x_2 = \boxed{?} = x_6 = \frac{1}{6}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

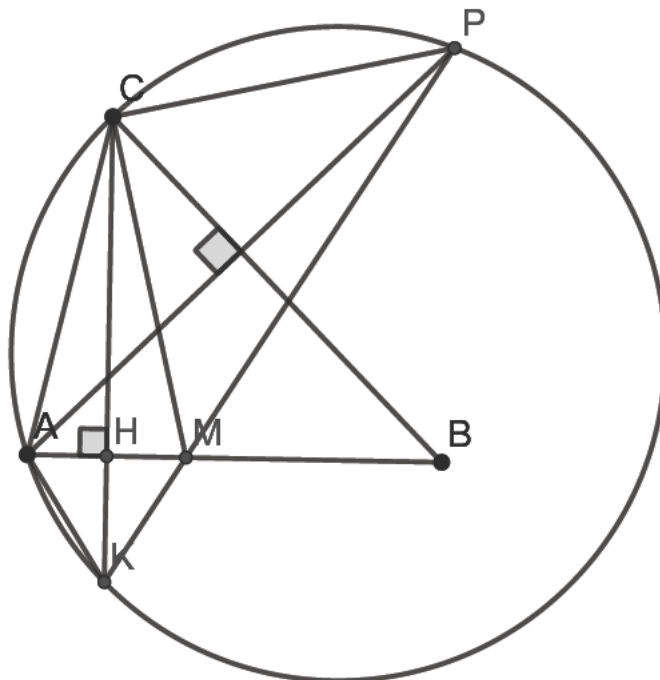
Только оценка – 5 баллов.

Только пример – 2 балла.

11.2-1. В остроугольном треугольнике ABC разность углов при вершинах A и B равна 20° (угол A больше угла B). Пусть CH – высота треугольника ABC . Точка P симметрична точке A относительно прямой BC . Прямая CH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ACP , в точке K . Прямая KP пересекает отрезок AB в точке M . Найдите угол BCM .

Ответ. 20° .

Решение. Докажем сначала, что $AC = CM$. В силу того, что CH – высота треугольника ACM , равенство $AC = CM$ равносильно тому, что CH – серединный перпендикуляр к отрезку AM , то есть тому, что KH – серединный перпендикуляр к отрезку AM . А это равносильно тому, что $AK = KM$, то есть равенству $\angle AKH = \angle MKH$, то есть $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$. Но $\alpha = \angle CPA$ (вписанные, опираются на дугу AC), $\beta = \angle CAP$ (вписанные, опираются на дугу CP). Наконец, по условию точки A и P симметричны относительно прямой BC , значит, $AC = CP$, и тогда $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$. Таким образом, треугольник ACM – равнобедренный ($AC = CM$). Тогда $\angle BCM = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA - \angle ACM = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA - (180^\circ - 2\angle CAB) = \angle CAB - \angle CBA = 20^\circ$.



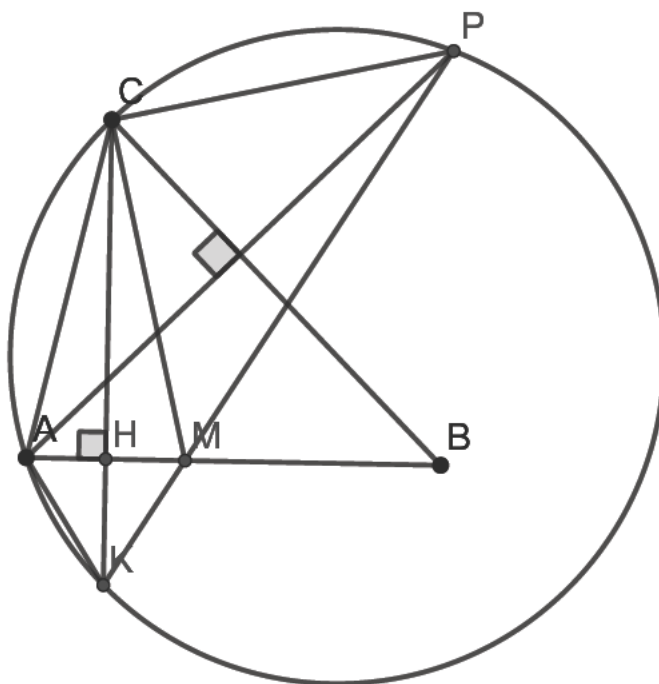
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказано, что треугольник $АСМ$ – равнобедренный – 4 балла.

11.2-2. В остроугольном треугольнике ABC разность углов при вершинах A и B равна 25° (угол A больше угла B). Пусть CH – высота треугольника ABC . Точка P симметрична точке A относительно прямой BC . Прямая CH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ACP , в точке K . Прямая KP пересекает отрезок AB в точке M . Найдите угол BCM .

Ответ. 25° .

Решение. Докажем сначала, что $AC=CM$. В силу того, что CH – высота треугольника ACM , равенство $AC=CM$ равносильно тому, что CH – серединный перпендикуляр к отрезку AM , то есть тому, что KH – серединный перпендикуляр к отрезку AM . А это равносильно тому, что $AK=KM$, то есть равенству $\angle AKH = \angle MKH$, то есть $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$. Но $\alpha = \angle CPA$ (вписанные, опираются на дугу AC), $\beta = \angle CAP$ (вписанные, опираются на дугу CP). Наконец, по условию точки A и P симметричны относительно прямой BC , значит, $AC=CP$, и тогда $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$. Таким образом, треугольник ACM – равнобедренный ($AC=CM$). Тогда $\angle BCM = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA - \angle ACM = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA - (180^\circ - 2\angle CAB) = \angle CAB - \angle CBA = 25^\circ$.



Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказано, что треугольник $АСМ$ – равнобедренный – 4 балла.

11.3-1. По одну сторону от плоскости α расположены точки A, B, C , по другую – точка D . Известно, что $ABCD$ – параллелограмм, и расстояния от точек A, B и C до плоскости α равны, соответственно, 1, 5 и 3. Найдите расстояние от точки D до этой плоскости.

Ответ. 1.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, A', B', C', D', O' – проекции соответствующих вершин и точки O на плоскость α . Тогда OO' – средняя

линия трапеции $CC'A'A$, поэтому $OO' = \frac{CC' + AA'}{2}$. А так как $DO = OB$, то $DD' + OO' = BB' - OO'$. Отсюда $DD' = BB' - 2OO' = BB' - AA' - CC' = 1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.3-2. По одну сторону от плоскости α расположены точки A, B, C , по другую – точка D . Известно, что $ABCD$ – параллелограмм, и расстояния от точек A, B и C до плоскости α равны, соответственно, 2, 7 и 3. Найдите расстояние от точки D до этой плоскости.

Ответ. 2.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, A', B', C', D', O' – проекции соответствующих вершин и точки O на плоскость α . Тогда OO' – средняя

линия трапеции $CC'A'A$, поэтому $OO' = \frac{CC' + AA'}{2}$. А так как $DO = OB$, то $DD' + OO' = BB' - OO'$. Отсюда $DD' = BB' - 2OO' = BB' - AA' - CC' = 2$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.4-1. Известно, что три натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию с разностью 10, являются делителями некоторого нечетного натурального числа N , причем первый член прогрессии является наименьшим делителем числа N , отличным от 1. Докажите, что N делится на 897.

Решение. Заметим, что среди делителей – чисел $k, k+10, k+20$ ровно одно делится на 3. Значит, число N делится на 3. Так как N – нечетное, то число 3 – его наименьший делитель, отличный от 1. Поэтому делителями N являются числа 3, 13, 23. А так как эти числа попарно взаимно просты, то N делится на $897 = 3 \cdot 13 \cdot 23$.

Комментарий. Замечено, что среди чисел $k, k+10, k+20$ ровно одно делится на 3 – 2 балла.

11.4-2. Известно, что три натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию с разностью 14, являются делителями некоторого нечетного натурального числа N , причем первый член прогрессии является наименьшим делителем числа N , отличным от 1. Докажите, что N делится на 1581.

Решение. Заметим, что среди делителей – чисел $k, k+14, k+28$ ровно одно делится на 3. Значит, число N делится на 3. Так как N – нечетное, то число 3 – его наименьший делитель, отличный от 1. Поэтому делителями N являются числа 3, 17, 31. А так как эти числа попарно взаимно просты, то N делится на $1581 = 3 \cdot 17 \cdot 31$.

Комментарий. Замечено, что среди чисел $k, k+14, k+28$ ровно одно делится на 3 – 2 балла.

11.5. В одной тетради Вася записал 11 натуральных чисел. В другую тетрадь Петя записал наибольшие общие делители каждой пары чисел, записанных в васиной тетради. Оказалось, что каждое число, записанное в одной из двух тетрадей, есть и в другой тетради. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано в васиной тетради?

Ответ. 10.

Решение.

Ответ. 10.

Заметим вначале, что для любых натуральных чисел $A \geq B$ выполняется неравенство $\text{НОД}(A; B) \leq A$, причем равенство выполняется только в случае, когда $A = B$. Пусть $A \geq B$ – два самых больших числа в васиной тетради. Тогда в петиной тетради число A может появиться только в одном случае, когда $A = B$; НОД всех других пар чисел будет меньше A . Значит, в васиной тетради не больше 10 различных чисел. Если Вася запишет в тетрадь числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, то в петиной тетради будут записаны только такие же числа.

Комментарий. Только пример с 10 различными числами – 2 балла.

Только оценка – 5 баллов.

11.6. В шахматном турнире участвовали одиннадцатиклассники и десятиклассники. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, и они набрали в 4,5 раза больше очков, чем десятиклассники. Ученик какого класса стал победителем турнира, и сколько очков он набрал? В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков.

Ответ. 10-классник, 10 очков.

Решение. Пусть в турнире участвовало x 10-классников и $10x$ 11-классников. Оценим, какое наибольшее количество очков могли набрать 10-классники и какое при этом наименьшее количество очков могли набрать 11-классники. Такое произойдет, если все 10-классники выиграли в партиях с 11-классниками. Тогда 10-классники наберут суммарно в

играх между собой $\frac{x(x-1)}{2}$ очков и $x \cdot 10x$ в играх с 11-классниками. А 11-классники наберут суммарно $\frac{10x(10x-1)}{2}$.

Из условия следует, что $\left(10x^2 + \frac{x(x-1)}{2}\right) \cdot 4,5 \geq \frac{10x(10x-1)}{2} \Leftrightarrow x \leq 1$.

Поэтому единственная возможная ситуация, это когда в турнире участвовал один 10-классник и он выиграл все партии у 11-классников, то есть набрал 10 очков.

Комментарий. Только пример одного турнира – 1 балл.

11.7-1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(0) \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3)$ оканчиваться на 1010?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0) = 0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0 + 2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0 + 2k)^m - x_0^m$ делится $(x_0 + 2k) - x_0 = 2k$). Но тогда по крайней мере два из чисел $P(0), P(1), P(2), P(3)$ являются четным, а, значит, произведение $P(0) \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3)$ делится на 4 и не может оканчиваться на 1010.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.7-2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) \cdot P(5)$ оканчиваться на 2030?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0) = 0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0 + 2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0 + 2k)^m - x_0^m$ делится $(x_0 + 2k) - x_0 = 2k$). Но тогда по крайней мере два из чисел $P(2), P(3), P(4), P(5)$ являются четным, а, значит, произведение $P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) \cdot P(5)$ делится на 4 и не может оканчиваться на 2030.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.8. Даны действительные числа $a_1, a_2, \boxed{?}, a_7$ такие, что $a_1 = a_7 = 0$. Верно ли, что всегда можно выбрать индекс $k \leq 5$ так, что будет выполняться неравенство $a_k + a_{k+2} \leq a_{k+1}\sqrt{3}$?

Ответ. Верно.

Решение. Предположим противное, то есть для любого $k = 1, 2, 3, 4, 5$ выполняется неравенство $a_k + a_{k+2} > a_{k+1}\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Т о г д а} \quad (a_1 + a_3) + (a_3 + a_5) &> a_2\sqrt{3} + a_4\sqrt{3} = (a_2 + a_4)\sqrt{3} > (a_3\sqrt{3})\sqrt{3} = 3a_3 \quad \text{и} \\ (a_3 + a_5) + (a_5 + a_7) &> a_4\sqrt{3} + a_6\sqrt{3} = (a_4 + a_6)\sqrt{3} > (a_5\sqrt{3})\sqrt{3} = 3a_5. \end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, получим

$$(a_1 + a_3) + (a_3 + a_5) + (a_3 + a_5) + (a_5 + a_7) > 3a_3 + 3a_5.$$

Учитывая, что $a_1 = a_7 = 0$, получаем противоречие $3a_3 + 3a_5 > 3a_3 + 3a_5$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.