21-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.
Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:

– правильное решение – 7 баллов;
– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2-3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

11 класс

11.1-1. Назовем число *интересным*, если любые две его соседние цифры отличаются на 2. Сколько 14-значных интересных чисел делится на 11?

Ответ. 0.

Решение. Воспользуемся критерием делимости на 11: «число делится на 11, если знакочередующаяся сумма S его цифр делится на 11». Разобьем цифры числа на 7 пар. Тогда $S = \pm 2 \pm 2 \ldots \pm 2$ (7 двоек). Но данная сумма четна и по модулю меньше 22. Поэтому интересное число может делиться на 11, только если $S = 0$. Но это также невозможно, поскольку в S входит нечетное число двоек (и либо больше будет со знаком плюс, либо со знаком минус). Поэтому ни одно интересное число не может делится на 11.

11.1-2. Назовем число *интересным*, если любые две его соседние цифры отличаются на 2. Сколько 18-значных интересных чисел делится на 11?

Ответ. 0.

Решение. Воспользуемся критерием делимости на 11: «число делится на 11, если знакочередующаяся сумма S его цифр делится на 11». Разобьем цифры числа на 9 пар. Тогда $S = \pm 2 \pm 2 \ldots \pm 2$ (9 двоек). Но данная сумма четна и по модулю меньше 22. Поэтому интересное число может делиться на 11, только если $S = 0$. Но это также невозможно, поскольку в S входит нечетное число двоек (и либо больше будет со знаком плюс, либо со знаком минус). Поэтому ни одно интересное число не может делится на 11.

Комментарий. Используется неверный критерий делимости на 11 (суммы цифр на четных и нечетных местах равны) – не более 3 баллов за задачу.

11.2-1. Пусть S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем 2. Известно, что $\dfrac{(S_{3n} - S_{2n})^2}{S_n(S_{4n} - S_{3n})} = 2048$. Найдите n.

Ответ. 11.

Решение. Пусть b – первый член данной прогрессии. Тогда $S_{m+k} = S_m + b \cdot 2^m + b \cdot 2^{m+1} + \ldots + b \cdot 2^{m+k-1}$, откуда $S_{m+k} - S_m = 2^m(b + b \cdot 2 + \ldots + b \cdot 2^{k-1}) = 2^m S_k$.

Из последней формулы следует, что $S_{3n}-S_{2n}=S_{2n+n}-S_{2n}=2^{2n}S_n$ и $S_{4n}-S_{3n}=S_{3n+n}-S_{3n}=2^{3n}S_n$.
Тогда изначальное уравнение будет равносильно следующему:

$$\frac{(2^{2n}S_n)^2}{S_n\cdot 2^{3n}S_n}=2048\Leftrightarrow 2^n=2^{11}\Leftrightarrow n=11.$$

11.2-2. Пусть S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем 2. Известно, что $\frac{(S_{4n}-S_{3n})^2}{S_n(S_{6n}-S_{5n})}=4096$. Найдите n.

Ответ. 12.

Решение.
Пусть b – первый член данной прогрессии. Тогда $S_{m+k}=S_m+b\cdot 2^m+b\cdot 2^{m+1}+\ldots+b\cdot 2^{m+k-1}$, откуда $S_{m+k}-S_m=2^m(b+b\cdot 2+\ldots+b\cdot 2^{k-1})=2^mS_k$.
Из последней формулы следует, что $S_{4n}-S_{3n}=S_{3n+n}-S_{3n}=2^{3n}S_n$ и $S_{6n}-S_{5n}=S_{5n+n}-S_{5n}=2^{5n}S_n$.
Тогда изначальное уравнение будет равносильно следующему:
$$\frac{(2^{3n}S_n)^2}{S_n\cdot 2^{5n}S_n}=2048\Leftrightarrow 2^n=2^{12}\Leftrightarrow n=12.$$

Комментарий. Баллы не ставятся, если написана формула суммы геометрической прогрессии (без дальнейших продвижений).

11.3-1. Докажите, что уравнение $x^{999}+2x^{998}+3x^{997}+...+999x+1000=0$ не имеет решений в целых числах
Решение. Во-первых, заметим, что любое решение этого уравнения – отрицательное число, поэтому целочисленный корень x_0 уравнения либо равен –1, либо $x_0\le -2$. Но значение многочлена при $x_0=-1$ – положительно, так как оно равно $-1+2-3+4-...-999+1000=500$. А при $x_0\le -2$ оно отрицательно, так как значение суммы каждой пары слагаемых $kx_0^{2n-k}+(k+1)x_0^{2n-k-1}=x_0^{2n-k-1}(kx_0+(k+1))$ (где k – нечетно), в сумму которых разбивается многочлен, – отрицательно (одна сумма может принимать нулевое значение).

11.3-2. Докажите, что уравнение $x^{499}+2x^{498}+3x^{497}+...+499x+500=0$ не имеет решений в целых числах

Решение. Во-первых, заметим, что любое решение этого уравнения – отрицательное число, поэтому целочисленный корень x_0 уравнения либо равен –1, либо $x_0\le -2$. Но значение многочлена при $x_0=-1$ – положительно, так как оно равно $-1+2-3+4-...-499+500=250$. А при $x_0\le -2$ оно отрицательно, так как значение суммы каждой пары слагаемых $kx_0^{2n-k}+(k+1)x_0^{2n-k-1}=x_0^{2n-k-1}(kx_0+(k+1))$ (где k – нечетно), в сумму которых разбивается многочлен, – отрицательно (одна сумма может принимать нулевое значение).

Комментарий. Написано с обоснованием, что любой корень уравнения – отрицательный – 2 балла.

11.4-1. Для выпуклого четырехугольника *ABCD* выполняется свойство: проекции противоположных сторон на одну диагональ имеют равные длины, и проекции противоположных сторон на вторую диагональ имеют равные длины (проекции лежат на диагоналях). Какое наибольшее значение может принимать $\angle ABC$, если $\angle BCD = 55°$?

Ответ. $\angle ABC = 125°$.

Решение. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD*. Пусть $\angle BAO = \alpha, \angle DCO = \beta, \angle AOD = \gamma$. По теореме о внешнем угле треугольника тогда получаем: $\angle ABO = \gamma - \alpha, \angle CDO = \gamma - \beta$. И, значит, указанные в условии проекции есть $AB \cdot \cos\alpha = CD \cdot \cos\beta$ и $AB \cdot \cos(\gamma-\alpha) = CD \cdot \cos(\gamma-\beta)$. Из этих равенств следует, что $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Пусть $\alpha > \beta$. Тогда $\gamma-\alpha < \gamma-\beta$, и из монотонности косинуса получаем: $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} < 1$, $\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)} > 1$. Последние неравенства противоречат равенству $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Аналогично невозможно и неравенство $\alpha < \beta$. Значит, $\alpha = \beta$. Тогда стороны *AB* и *CD* параллельны. Кроме того, они равны, так как равны их проекции. Значит, четырехугольник *ABCD* – параллелограмм. Поэтому $\angle ABC = 180° - \angle BCD = 125°$.

11.4-2. Для выпуклого четырехугольника *ABCD* выполняется свойство: проекции противоположных сторон на одну диагональ имеют равные длины, и проекции противоположных сторон на вторую диагональ имеют равные длины (проекции лежат на диагоналях). Какое наименьшее значение может принимать $\angle BCD$, если $\angle ADC = 100°$?

Ответ. $\angle BCD = 80°$.

Решение. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD*. Пусть $\angle BAO = \alpha, \angle DCO = \beta, \angle AOD = \gamma$. По теореме о внешнем угле треугольника тогда получаем: $\angle ABO = \gamma - \alpha, \angle CDO = \gamma - \beta$. И, значит, указанные в условии проекции есть $AB \cdot \cos\alpha = CD \cdot \cos\beta$ и $AB \cdot \cos(\gamma-\alpha) = CD \cdot \cos(\gamma-\beta)$. Из этих равенств следует, что $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Пусть $\alpha > \beta$. Тогда $\gamma-\alpha < \gamma-\beta$, и из монотонности косинуса получаем: $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} < 1$, $\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)} > 1$. Последние неравенства противоречат равенству $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Аналогично невозможно и неравенство $\alpha < \beta$. Значит, $\alpha = \beta$. Тогда стороны *AB* и *CD* параллельны. Кроме того, они равны, так как равны их проекции. Значит, четырехугольник *ABCD* – параллелограмм. Поэтому $\angle BCD = 180° - \angle ADC = 80°$.

Комментарий. Доказано, что четырехугольник *ABCD* – параллелограмм – 6 баллов.