Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

2020-2021 уч. года

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи в соответствии с вариантами замены.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:

– правильное решение – 7 баллов;

– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;

– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;

– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;

– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2 – 3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что ответы в каждой задаче требуют объяснения.

10 класс

В варианте:

Должна стоять ровно одна задача из 10.3-1, 10.3-2, 10.4

Должна стоять ровно одна задача из 10.6-1,2 и 10.2

Должна стоять ровно одна задача из 10.1-1,2 и 10.5

10.1-1. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 - \sqrt{y+1}$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 4 - \sqrt{y}$.

Ответ. 0.

Решение. Сложив равенства, получим $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 9 - \sqrt{y} - \sqrt{y+1}$.

Заметим, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \geq 8$ так как $x_i + \frac{1}{x_i} \geq 2\sqrt{x_i \cdot \frac{1}{x_i}} = 2$, причем неравенство обращается в равенство только при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

А так как $y \geq 0$, то выполняется $9 - \sqrt{y} - \sqrt{y+1} \leq 9 - 0 - 1 = 8$, причем неравенство обращается в равенство только при $y = 0$.

Значит, единственный возможный случай, это $y = 0$ (при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$).

При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

10.1-2. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 такие, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 - \sqrt{y+4}$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 5 - \sqrt{y}$.

Ответ. 0.

Решение. Сложив равенства, получим $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 12 - \sqrt{y} - \sqrt{y+4}$.

Заметим, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \geq 10$ так как $x_i + \frac{1}{x_i} \geq 2\sqrt{x_i \cdot \frac{1}{x_i}} = 2$, причем неравенство обращается в равенство только при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

А так как $y \geq 0$, то выполняется $12 - \sqrt{y} - \sqrt{y+4} \leq 12 - 0 - 2 = 10$, причем неравенство обращается в равенство только при $y = 0$.

Значит, единственный возможный случай, это $y = 0$ (при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$).

При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

10.2. Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, …, 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.

Решение. Обозначим эти числа *A* и $B = 3A$. Тогда сумма цифр числа *B* делится на 3. Но сумма цифр на всех карточках делится на 9 (а, значит, и на 3), поэтому сумма цифр числа *A* делится на 3. Значит, число *A* делится на 3. Но тогда число $B = 3A$ делится на 9 и сумма его цифр делится на 9. А так как сумма цифр на всех карточках делится на 9, то тогда и сумма цифр числа А делится на 9. Значит, число *A* делится на 9. Поэтому число $B = 3A$ делится на 27. Итак, число *B* делится на 27 и больше 27, поэтому оно раскладывается на 4 множителя 3, 3, 3 и $\frac{B}{27} > 1$.

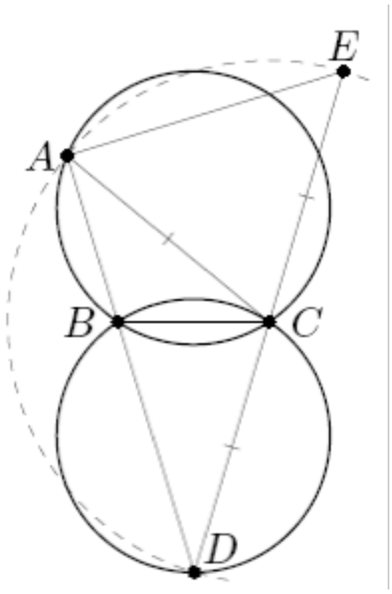
Комментарий. Доказано, что большее из чисел делится на 9 – 3 балла.

10.3-1. Пусть B и C – точки пересечения двух окружностей равных радиусов. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC = CE$. Найдите угол *CEA*, если угол *CDB* равен 50°.

Ответ. 40°.

Решение. Докажем сначала, что угол DAE – прямой. Соединим точки A и C. Общая хорда BC двух равных окружностей стягивает равные дуги этих окружностей, поэтому опирающиеся на эти дуги вписанные углы BAC и BDC равны. Но тогда треугольник ACD – равнобедренный, откуда $AC = CD = CE$ (последнее – в силу условия задачи). Итак, точка C является центром окружности, описанной около треугольника DAE. Отрезок DE является диаметром этой окружности, откуда следует, что угол DAE – прямой.

Тогда $\angle CEA = \angle DEA = 90° - \angle ADE = 90° - \angle CDB = 40°$.



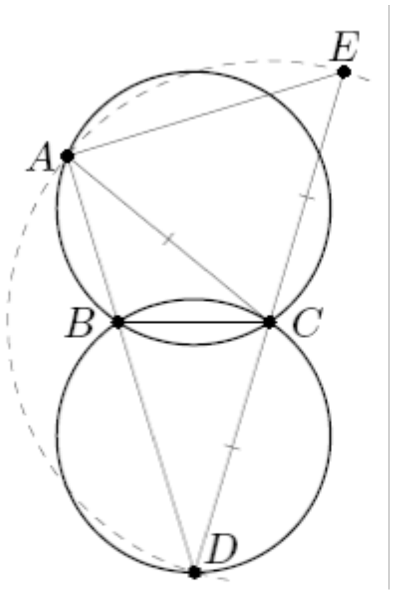
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

10.3-2. Пусть B и C – точки пересечения двух окружностей равных радиусов. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC = CE$. Найдите угол CEA, если угол CDB равен $40°$.

Ответ. $50°$.

Решение. Докажем сначала, что угол DAE – прямой. Соединим точки A и C. Общая хорда BC двух равных окружностей стягивает равные дуги этих окружностей, поэтому опирающиеся на эти дуги вписанные углы BAC и BDC равны. Но тогда треугольник ACD – равнобедренный, откуда $AC = CD = CE$ (последнее – в силу условия задачи). Итак, точка C является центром окружности, описанной около треугольника DAE. Отрезок DE является диаметром этой окружности, откуда следует, что угол DAE – прямой.

Тогда $\angle CEA = \angle DEA = 90° - \angle ADE = 90° - \angle CDB = 50°$.



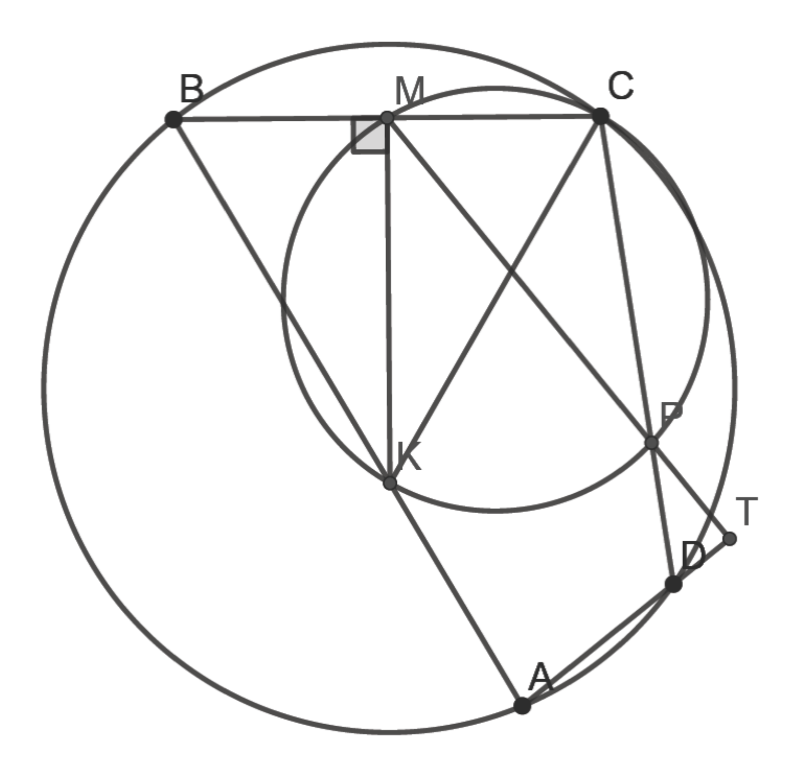
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

10.4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне BC, проведенный через ее середину – точку M, пересекает сторону AB в точке K. Окружность с диаметром KC пересекает отрезок CD в точке P ($P \neq C$). Найдите угол между прямыми MP и AD.

Ответ. 90°.

Решение. Докажем, что прямые MP и AD перпендикулярны. Пусть ω – окружность, построенная на KC как на диаметре, тогда точка M лежит на ω, так как угол CMK – прямой. Значит, $\angle CPM = \angle CKM = \alpha$ (они опираются на дугу CM окружности ω). Пусть T – точка пересечения прямых AD и MP. Будем считать, что точка D лежит на отрезке AT. Другой случай разбирается аналогично. Тогда $\angle TPD = \alpha$ (углы TPD и CPM – вертикальные). Значит, для того, чтобы доказать, что прямые AD и MP перпендикулярны, нам нужно доказать, что $\angle PDT + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Но если $\angle PDT = \beta$, то $\angle PDA = \pi - \beta \Rightarrow \angle ABC = \beta$, так как четырехугольник $ABCD$ – вписанный. Наконец, $BK = CK$, так как MK – серединный перпендикуляр к BC. Следовательно, $\angle KCM = \angle KBM = \beta$. А из прямоугольного треугольника KMC получаем $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Утверждение доказано.



Комментарий. Разобран только один случай расположения точки D – баллы не снимаются.

Доказано, что точка M лежит на ω –1 балл.

10.5. В шахматном турнире участвовали десятиклассники и девятиклассники. Десятиклассников было в 9 раз больше, и они набрали в 4 раза больше очков, чем девятиклассники. Ученик какого класса стал победителем турнира, и сколько очков он набрал? В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков.

Ответ. 9-классник, 9 очков.

Решение. Пусть в турнире участвовало x 9-классников и $9x$ 10-классников. Оценим, какое наибольшее количество очков могли набрать 9-классники и какое при этом наименьшее количество очков могли набрать 10-классники. Такое произойдет, если все 9-классники выиграли в партиях с 10-классниками. Тогда 9-классники наберут суммарно в играх между собой $\frac{x(x-1)}{2}$ очков и $x \cdot 9x$ в играх с 10-классниками. А 10-классники наберут суммарно $\frac{9x(9x-1)}{2}$.

Из условия следует, что $\left(9x^2 + \frac{x(x-1)}{2}\right) \cdot 4 \geq \frac{9x(9x-1)}{2} \Leftrightarrow x \leq 1$.

Поэтому единственная возможная ситуация, это когда в турнире участвовал один 9-классник и он выиграл все партии у 10-классников, то есть набрал 9 очков.

Комментарий. Только пример одного турнира – 1 балл.

10.6-1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(0)\cdot P(1)$ оканчиваться на 4321?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0)=0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0+2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0+2k)^m - x_0^m$ делится $(x_0+2k)-x_0=2k$). Но тогда по крайней мере одно из чисел $P(0), P(1)$ является четным, а, значит, произведение $P(0)\cdot P(1)$ – четно и не может оканчиваться на 4321.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

10.6-2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(1)\cdot P(2)$ оканчиваться на 2021?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0)=0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0+2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0+2k)^m - x_0^m$ делится $(x_0+2k)-x_0=2k$). Но тогда по крайней мере одно из чисел $P(1), P(2)$ является четным, а, значит, произведение $P(1)\cdot P(2)$ – четно и не может оканчиваться на 4321.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.