21-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.
Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:

– правильное решение – 7 баллов;
– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2-3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

10 класс

10.1-1. На полуокружности равномерно отметили 200 точек (расстояние между любыми двумя соседними точками равны). Любые две точки, между которыми не более 19 точек, соединили отрезком. Сколько равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках нарисовано?

Ответ. 1890.

Решение. Посчитаем основания этих равнобедренных треугольников. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек. Если между точками основания лежит 19 точек, то таких оснований будет $200-19-1=180$. Если 17 – то 182, если 15 – то 184, …, если 1 – то 198. Таким образом, искомое количество равно $\frac{180+198}{2}\cdot 10=1890$.

10.1-2. На полуокружности равномерно отметили 210 точек (расстояние между любыми двумя соседними точками равны). Любые две точки, между которыми не более 17 точек, соединили отрезком. Сколько равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках нарисовано?

Ответ. 1800.

Решение. Посчитаем основания этих равнобедренных треугольников. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек. Если между точками основания лежит 17 точек, то таких оснований будет $210-17-1=192$. Если 15 – то 194, если 13 – то 196, …, если 1 – то 208. Таким образом, искомое количество равно $\frac{192+208}{2}\cdot 9=1800$.

Комментарий. Неверный ответ из-за того, что количество треугольников одного типа отличается от правильного на 1 – снять 2 балла.

10.2-1. Задано 4 натуральных числа *a*, *b*, *c*, *d*. На доску в некотором порядке написали 6 чисел – попарные суммы чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Оказалось, что первое число на доске делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 8, пятое – на 9 и шестое на 10. Может ли сумма $a+b+c+d$ оказаться простым числом?

Ответ. Не может.

Решение. Докажем, что среди чисел *a*, *b*, *c*, *d* четное количество нечетных чисел. Действительно, если бы среди чисел *a*, *b*, *c*, *d* было бы ровно одно четное или ровно одно нечетное, то из 6 написанных на доске попарных сумм ровно 3 были бы четными. Однако для того, чтобы попарные суммы делились на 2, 4, 8 и 10, нужно, чтобы они были четными, то есть четных попарных сумм должно быть не менее 4, а их всего 3. Значит, среди чисел *a*, *b*, *c*, *d* четное количество нечетных чисел. Поэтому их сумма $a+b+c+d$ является четным числом, большим 2, то есть не является простым.

10.2-2. Задано 4 натуральных числа *a*, *b*, *c*, *d*. На доску в некотором порядке написали 6 чисел – попарные суммы чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Оказалось, что первое число на доске делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 10, пятое – на 11 и шестое на 12. Может ли сумма $a+b+c+d$ оказаться простым числом?

Ответ. Не может.
Решение. Докажем, что среди чисел *a*, *b*, *c*, *d* четное количество нечетных чисел. Действительно, если бы среди чисел *a*, *b*, *c*, *d* было бы ровно одно четное или ровно одно нечетное, то из 6 написанных на доске попарных сумм ровно 3 были бы четными. Однако для того, чтобы попарные суммы делились на 2, 4, 10 и 12, нужно, чтобы они были четными, то есть четных попарных сумм должно быть не менее 4, а их всего 3. Значит, среди чисел *a*, *b*, *c*, *d* четное количество нечетных чисел. Поэтому их сумма $a+b+c+d$ является четным числом, большим 2, то есть не является простым.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

10.3-1. Дана парабола $y=6x^2$. На параболе выбраны четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* так, что углы *AOB* и *COD* – прямые (*O* – начало координат). Отрезки *AB* и *CD* пересекаются в точке *P*. Найдите наибольшую возможную длину отрезка *OP*.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

Решение. Докажем, что для параболы $y=ax^2$ все такие отрезки пересекаются на оси *Oy* в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Рассмотрим точки *A* и *B*. Пусть их координаты $A\left(x_A,ax_A^2\right),B\left(x_B,ax_B^2\right)$. Так как угол *AOB* – прямой, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+a^2x_A^2x_B^2=0$, откуда $x_Ax_B=-\frac{1}{a^2}$. Пусть прямая *AB* с уравнением $y=kx+b$ пересекает параболу $y=ax^2$. Тогда абсциссы точек пересечения x_A,x_B находятся из уравнения $ax^2-kx-b=0$. По теореме Виета $x_Ax_B=-\frac{b}{a}$. Значит, $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{a^2}$. Откуда $b=\frac{1}{a}$, то есть прямая *AB* пересекает *Oy* в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Поэтому длина отрезка *OP* равна $\frac{1}{a}=\frac{1}{6}$.

10.3-2. Дана парабола $y=11x^2$. На параболе выбраны четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* так, что углы *AOB* и *COD* – прямые (*O* – начало координат). Отрезки *AB* и *CD* пересекаются в точке *P*. Найдите наибольшую возможную длину отрезка *OP*.

Ответ. $\frac{1}{11}$.

Решение. Докажем, что для параболы $y=ax^2$ все такие отрезки пересекаются на оси *Oy* в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Рассмотрим точки *A* и *B*. Пусть их координаты $A\left(x_A,ax_A^2\right),B\left(x_B,ax_B^2\right)$. Так как угол AOB – прямой, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+a^2x_A^2x_B^2=0$, откуда $x_Ax_B=-\frac{1}{a^2}$. Пусть прямая AB с уравнением $y=kx+b$ пересекает параболу $y=ax^2$. Тогда абсциссы точек пересечения x_A, x_B находятся из уравнения $ax^2-kx-b=0$. По теореме Виета $x_Ax_B=-\frac{b}{a}$. Значит, $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{a^2}$. Откуда $b=\frac{1}{a}$, то есть прямая AB пересекает Oy в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Поэтому длина отрезка OP равна $\frac{1}{a}=\frac{1}{11}$.

Комментарий. Условие перпендикулярности прямых OA и OB записано через связь между координатами точек – 3 балла.

10.4-1. На основании AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD в два раза больше длины AC. Найдите угол между прямыми AC и DB.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{4}$.

Решение. Пусть $\angle BAC=\alpha, \angle BCA=\gamma$, O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и BDC соответственно. Треугольники O_1BO_2 и O_1DO_2 равны по трем равным сторонам, из этого следует, что O_1O_2 – биссектриса угла BO_1D. Тогда $\angle BO_1O_2=\frac{1}{2}\angle BO_1D$. В свою очередь угол BO_1D в два раза больше угла BAC, как центральный и вписанный, отсюда следует, что $\angle BO_1O_2=\angle BAC=\alpha$. Аналогично получаем, что $\angle BO_2O_1=\gamma$. Итого получается, что треугольники ABC и O_1BO_2 подобны по двум равным углам α и γ.

Введем обозначение $O_1B=R$. Тогда из подобия треугольников ABC и O_1BO_2 следует, что $\frac{AB}{R}=\frac{AC}{O_1O_2}$. Следовательно, $AB=\frac{R}{2}$. Из теоремы синусов для треугольника ABD следует, что $\sin\angle ADB=\frac{AB}{2R}=\frac{1}{4}$. Итого получаем, что искомый угол равен $\arcsin\frac{1}{4}$.

10.4-2. На основании AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD в три раза больше длины AC. Найдите угол между прямыми AC и DB.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{6}$.

Решение. Пусть $\angle BAC=\alpha, \angle BCA=\gamma$, O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и BDC соответственно. Треугольники O_1BO_2 и O_1DO_2 равны по трем равным сторонам, из этого следует, что O_1O_2 – биссектриса угла BO_1D. Тогда $\angle BO_1O_2=\frac{1}{2}\angle BO_1D$. В свою очередь угол BO_1D в два раза больше угла BAC, как центральный и вписанный, отсюда следует, что $\angle BO_1O_2=\angle BAC=\alpha$. Аналогично получаем, что $\angle BO_2O_1 = \gamma$. Итого получается, что треугольники ABC и O_1BO_2 подобны по двум равным углам α и γ.

Введем обозначение $O_1B = R$. Тогда из подобия треугольников ABC и O_1BO_2 следует, что $\dfrac{AB}{R} = \dfrac{AC}{O_1O_2}$. Следовательно, $AB = \dfrac{R}{3}$. Из теоремы синусов для треугольника ABD следует, что $\sin\angle ADB = \dfrac{AB}{2R} = \dfrac{1}{6}$. Итого получаем, что искомый угол равен $\arcsin\dfrac{1}{6}$.

Комментарий. Доказано, что O_1O_2 – биссектриса угла BO_1D – 2 балла.
Доказано подобие треугольников ABC и O_1BO_2 – 3 балла.