ВАРИАНТ 1

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1 400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Синица двигается по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0\left(\sqrt{3};3\right)$ и $N_0\left(6;-2\sqrt{3}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}2(a-b)x+6y=a,\\ 3bx+(a-b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25}=x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4+x^2+2x-5x^2|x+1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7 000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x+y+5|+|x-y+5|\leqslant 10,\\ (|x|-5)^2+(|y|-12)^2=169.\end{cases}$$

ВАРИАНТ 9

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Пчела двигается по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2;0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a, b и c, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} ax+2y+cz=c, \\ 3x+by+4z=4b \end{cases}$$
не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $\sqrt{x^3-10x+7}+1 \quad \cdot \left|x^3-18x+28\right| \leqslant 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4+x^2-6x-3x^2|x-3|+9=0$.

5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} a^2-2ax-6y+x^2+y^2=0, \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=25 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

ВАРИАНТ 10

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Котёнок двигается по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6;0)$ и $N_0\left(2;2\sqrt{3}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a, b и c, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$
не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leqslant 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x+3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.