

# Онлайн этап олимпиады «Физтех» 2019-2020

## 11 класс

1. В тупоугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AD$  и  $CE$ . Продолжения этих высот пересекаются в точке  $S$ . На отрезке  $AB$  выбрана точка  $P$ , а на отрезке  $CB$  выбрана точка  $Q$  так, что углы  $AQS$  и  $CPS$  – прямые. Найдите произведение  $SP \cdot SQ$ , если известно, что площадь треугольника  $SDE$  равна  $\text{param1}$ , а  $\text{param2}$ .

param1	param2	Ответ
3	$\cos(\angle ABC) = -\frac{3}{5}$	
9	$\cos(\angle ABC) = -\frac{4}{5}$	
15	$\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{13}$	
45	$\cos(\angle ABC) = -\frac{12}{13}$	
30	$\cos(\angle ABC) = -\frac{8}{17}$	

2. Найдите **наибольшее** значение выражения  $3\sin^5 x - 4\cos^5 x$ , если  $x$  удовлетворяет равенству  $\text{param1}$ .

param1	Ответ
$2(\sin^2 x + \sin x) + \cos^2 x + \cos^3 x = 0$	
$2(\sin^2 x - \sin x) + \cos^2 x + \cos^3 x = 0$	
$2(\sin^2 x - \sin x) + \cos^2 x - \cos^3 x = 0$	
$2(\sin^2 x + \sin x) + \cos^2 x - \cos^3 x = 0$	

3. При каком  $\text{param1}$  положительном значении параметра  $a$  система  $\text{param2}$  будет иметь ровно одно решение. В ответ запишите куб найденного значения параметра.

param1	param2	Ответ
<b>минимальном</b>	$\begin{cases} xy^2 = 8, \\ \left(y - \frac{a}{x} - \frac{2}{a}\right) \left(x^2 + \left(y - \frac{2}{a}\right)^2 - 2a\right) = 0 \end{cases}$	
<b>максимальном</b>	$\begin{cases} xy^2 = 4, \\ \left(y - \frac{a}{x} - \frac{1}{a}\right) \left(x^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 - 2a\right) = 0 \end{cases}$	

<b>максимальном</b>	$\begin{cases} x^2 y = 12, \\ \left(x - \frac{a}{y} - \frac{3}{a}\right) \left(y^2 + \left(x - \frac{3}{a}\right)^2 - 2a\right) = 0 \end{cases}$	
<b>минимальном</b>	$\begin{cases} x^2 y = 16, \\ \left(x - \frac{a}{y} - \frac{4}{a}\right) \left(y^2 + \left(x - \frac{4}{a}\right)^2 - 2a\right) = 0 \end{cases}$	
<b>минимальном</b>	$\begin{cases} xy^2 = 20, \\ \left(y - \frac{a}{x} - \frac{5}{a}\right) \left(x^2 + \left(y - \frac{5}{a}\right)^2 - 2a\right) = 0 \end{cases}$	

4. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  внешним образом построен равнобедренный треугольник  $AMB$  (param1). Найдите **максимальную** длину отрезка  $CM$ , если param2.

param1	param2	Ответ
$BM = AM = 5$	$\angle BAC = \arcsin \frac{3}{5}$	
$BM = AM = 10$	$\angle BAC = \arccos \frac{3}{5}$	
$BM = AM = 13$	$\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$	
$BM = AM = 26$	$\angle BAC = \operatorname{arccotg} \frac{5}{12}$	
$BM = AM = 17$	$\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$	

5. Найдите все значения  $a$  и  $b$ , при которых уравнения param1 имеют два общих корня. В ответе укажите **наибольшее** возможное значение  $a + b$ .

param1	Ответ
$x(x^2 - 4x - 2) = a$ и $x(x^2 + x - 7) = b$	
$x(x^2 - 3x - 2) = a$ и $x(x^2 + 4x - 9) = b$	
$x(x^2 - 3x - 7) = a$ и $x(x^2 + 2x - 2) = b$	
$x(x^2 - x - 7) = a$ и $x(x^2 + 2x - 4) = b$	
$x(x^2 - 2x - 7) = a$ и $x(x^2 + 3x - 2) = b$	

6. Найдите количество param1-значных чисел, произведение цифр которых делится на param2.

param1	param2	Ответ
6	28	
6	63	

7	20	
7	45	
7	63	

7. Пусть  $x, y, z$  – натуральные числа. Известно, что произведение  $xy^2z^3 = \text{param1}$ . На какую максимальную степень двойки может делиться  $x^2 + y^2 + z^2$ ?

param1	Ответ
1089994752	
1816657920	
12918456320	
2113929216	
3321888768	

8. В ряд в порядке возрастания выписали все семизначные числа. Потом те из них, в записи которых встречаются цифры 0, 7, 8 или 9, вычеркнули. Какое число будет стоять на param1 месте?

param1	Ответ
135424	
201123	
225018	
187346	
155793	

9. Вершина  $A$  основания  $ABCD$  правильной пирамиды  $SABCD$  совпадает с вершиной конуса, вершины  $B$  и  $D$  лежат на его боковой поверхности, вершина  $S$  – на окружности основания этого конуса, а вершина  $C$  – в плоскости его основания. Найдите объем param1, если объем param2 равен param3.

param1	param2	param3	Ответ
конуса	пирамиды	$\frac{5\sqrt{2}}{\pi}$	
конуса	пирамиды	$\frac{6}{\sqrt{2}\pi}$	
пирамиды	конуса	$\frac{9\pi}{5\sqrt{2}}$	
пирамиды	конуса	$\frac{27\pi}{20\sqrt{2}}$	

10. Коля сложил 27 чисел, в десятичной записи которых используется одна и та же цифра  $N$  и не используются никакие другие цифры. Какое **наименьшее** число, большее param1, он мог получить?

param1	Ответ
3542623080	

6521315190	
5151244290	
4452232290	
3625231290	