Онлайн-олимпиада «Phystech.International» 2019-2020

11 класс

1. Найдите **наименьшее** натуральное число N такое, что среди чисел от N до param1 (включительно) нет ни одного точного куба.

param1	Ответ
$N+47249$	
$N+51089$	
$N+58379$	
$N+76319$	
$N+87209$	

2. Дан правильный param1-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен $60°$. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

param1	Ответ
18	
15	
27	
21	
24	

3. На координатной плоскости каждой точке с координатами (a,b) поставили в соответствие число $f(a,b)$. Оказалось, что для любых чисел a, b, c выполняются равенства: $f(a,a)=0$, $f(a, f(b,c)) = f(a,b)+c$. Найдите param1.

param1	Ответ
$f(1110,2025)$	
$f(1070,2013)$	
$f(1150,2019)$	
$f(1013,2055)$	
$f(1217,2117)$	

4. Пусть AM – медиана треугольника ABC. На отрезке AM выбрана точка K так, что $\angle BAC+\angle BKC=180°$. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы длин отрезков AC и BK, если param1.

param1	Ответ
$AB=9, CK=4$	
$AB=25, CK=16$	
$AB=36, CK=25$	
$AB=25, CK=9$	
$AB=49, CK=16$	

5. Для некоторых натуральных чисел a и b выполняется неравенство param1. Найдите **наименьшее** возможное произведения ab, если каждое из этих чисел больше param2.

param1	param2	Ответ
$\sqrt{a(a+15)}+\sqrt{b(b+15)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{(a+15)(b+15)}$	100	
$\sqrt{a(a+14)}+\sqrt{b(b+14)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{(a+14)(b+14)}$	200	
$\sqrt{a(a+13)}+\sqrt{b(b+13)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{(a+13)(b+13)}$	300	
$\sqrt{a(a+12)}+\sqrt{b(b+12)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{(a+12)(b+12)}$	400	
$\sqrt{a(a+11)}+\sqrt{b(b+11)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{(a+11)(b+11)}$	500	

6. Квадрат $ABCD$ и окружность расположены так, что окружность касается прямой BD в точке D, а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой BD, что и точка A.
Из точки C к окружности провели касательные CK и CM (K, M – точки касания). Оказалось, что угол KCM = param1. Найдите сторону квадрата, если радиус окружности равен param2.

param1	param2	Ответ
$2\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$	$5\sqrt{2}$	
$2\arcsin\sqrt{\frac{1}{5}}$	$4\sqrt{2}$	
$2\arcsin\sqrt{\frac{2}{17}}$	$6\sqrt{2}$	
$2\arcsin\sqrt{\frac{1}{13}}$	$25\sqrt{2}$	
$2\arcsin\sqrt{\frac{2}{37}}$	$13\sqrt{2}$	

7. Про квадратный трехчлен $f(x)$ известно, что param1 и param2. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

param1	param2	Ответ
$f(1)+f(2)+f(4)=0$	$f(3)+f(-1)+f(7)=0$	
$f(1)+f(3)+f(5)=0$	$f(-1)+f(4)+f(8)=0$	
$f(2)+f(3)+f(5)=0$	$f(1)+f(6)+f(7)=0$	
$f(2)+f(3)+f(-3)=0$	$f(1)+f(4)+f(5)=0$	
$f(2)+f(5)+f(7)=0$	$f(1)+f(3)+f(12)=0$	

8. Прямоугольник param1 разрезан на квадраты 1×1, 2×2, 4×4. Суммарное количество квадратов разрезания оказалось равным N, где param2. Найдите **наименьшее** возможное значение N.

param1	param2	Ответ

162×117	$N > 4926$	
164×121	$N > 4371$	
198×125	$N > 4998$	
184×105	$N > 6403$	
162×119	$N > 6510$	

9. Найдите количество целочисленных значений параметра a, при которых один из корней уравнения param1 больше 1, а другой – меньше 1.

param1	Ответ
$(a^2+a+1)x^2+(3a+1)x+3a+3=0$	
$(a^2+a+1)x^2+(-10a+2)x-(4a+1)=0$	
$(a^2+a+1)x^2+(1-20a)x+8a+1=0$	
$(a^2+a+1)x^2+(5a+4)x+3a+2=0$	
$(a^2+a+1)x^2+(9a+2)x+5a-7=0$	

10. Различные числа a, b, c, d таковы, что числа $\log_a b, \log_c b, \log_c d, \log_a d$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите **наименьшее** возможное значение c, если param1.

param1	Ответ
$a=5$	
$a=6$	
$a=7$	
$a=9$	
$a=10$	