

ВАРИАНТ 1

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

Ответ: $(2; 2\sqrt{3})$, $(-4; 0)$, $(2; -2\sqrt{3})$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся муравей и жук $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{\pi}{2}$, и при этом $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$, $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$ – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

Расстояние между муравьём и жуком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 2$ и $|AN_0| = 4$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = 2|AM_0|$, то угловая скорость муравья в 2 раза больше угловой скорости жука.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ жук продвинулся на угол ω . Тогда $\alpha_0 - 2\omega = \beta_0 + \omega + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\omega = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{3} - \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3}$, где $n = 0, -1, -2, \dots$

Различных точек будет три (при $n = 0, -1, -2$). Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Координаты положения жука найдём по формулам $x_N = 4 \cos \beta_1 = 2$, $y_N = 4 \sin \beta_1 = 2\sqrt{3}$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и имеют, соответственно, координаты $(-4; 0)$ и $(2; -2\sqrt{3})$.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(-2 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 2)$, $(\sqrt{7} - 2; -2 - \sqrt{7})$.

Решение. Если $b = 0$, то второе уравнение системы принимает вид $1 = 0$, и поэтому решений у системы нет. При всех остальных значениях параметров в каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Следовательно, оба уравнения системы определяют некоторые прямые, и для существования бесконечного количества решений нужно, чтобы эти прямые совпадали. Это возможно при пропорциональности коэффициентов уравнений, т.е. при

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}. \quad (1)$$

Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных или свободные члены обращаются в ноль в обоих уравнениях¹. Рассматривая первое равенство из (??), получаем $(a+b)^2 = 16$, $a = \pm 4 - b$. Далее подставим это во второе равенство (??):

– если $a = -4 - b$, то $-\frac{3}{b} = -4 - b$, $b^2 + 4b - 3 = 0$, $b = -2 \pm \sqrt{7}$; отсюда получаем два решения системы: $(-2 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 2)$ и $(\sqrt{7} - 2; -2 - \sqrt{7})$;

– если $a = 4 - b$, то $\frac{3}{b} = 4 - b$, $b^2 - 4b + 3 = 0$, $b = 1$ или $b = 3$; отсюда получаем ещё два решения системы: $(1; 3)$, $(3; 1)$.

¹Вообще говоря, это существенное замечание. Например, уравнения $y + 8 = 0$ и $2y + 16 = 0$ задают одну и ту же прямую.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

Ответ: 2; $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

Решение. Раскладывая правую часть на множители, получаем $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$. Отсюда есть две возможности: либо $x+3=0$ (тогда $x=-3$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3-x+10} = x+2$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3-3x+10 = (x+2)^2, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x^2-5x+6 = 0, \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+x-3) = 0, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x=2$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, и из них неравенству удовлетворяют $x=2$ и $x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $2x^4+(x-1)^2-3x^2|x-1| \geq 0$ или $|x-1|^2-3x^2|x-1|+2x^4 \geq 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y=|x-1|$ с дискриминантом, равным $(3x^2)^2-4 \cdot 2x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{3x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1 = x^2$ и $y_2 = 2x^2$, а неравенство принимает вид $(|x-1|-x^2)(|x-1|-2x^2) \geq 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A-B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} ((x-1)^2-x^4)((x-1)^2-4x^4) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2+x-1)(x^2-x+1)(2x^2+x-1)(2x^2-x+1) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2+x-1)(2x^2+x-1) &\geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right). \end{aligned}$$

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ: 5880.

Решение. Ввиду того, что $1400 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^2$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три двойки, две пятёрки, одна семёрка и две единицы, (б) четвёрка, двойка, две пятёрки, одна семёрка и три единицы или (в) восьмёрка, две пятёрки, одна семёрка и четыре единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения двоек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем два места из пяти оставшихся для размещения пятёрок ($C_5^2 = \frac{5!}{2!3!}$ способов), затем одно место из трёх оставшихся для семёрки ($C_3^1 = 1$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{8!}{3!2!2!} = 1680$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!3!} = 3360$.

(в) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!4!} = 840$.

Окончательно получаем $1680 + 3360 + 840 = 5880$ способов.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

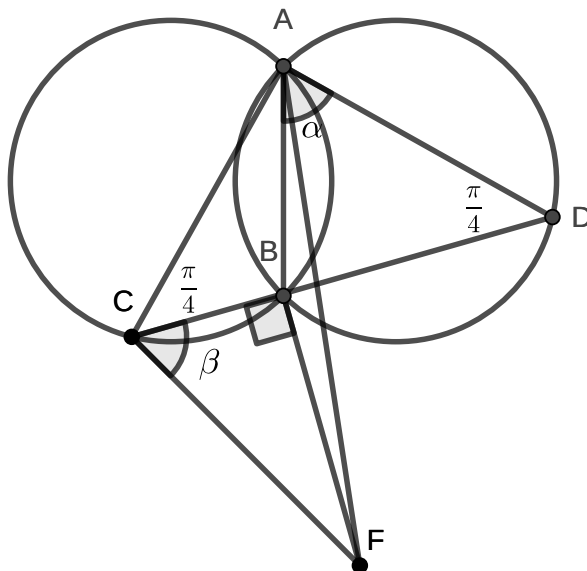


Рис. 1: вариант 1, задача 6

Ответ: 18.

Решение. Пусть $R = 9$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R \cos \alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 18$.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x - 3 - y| + |x - 3 + y| \leq 6, \\ (|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0)$, $(6; 0)$.

Решение. Рассмотрим неравенство системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x - 3 - y = 0$ и $x - 3 + y = 0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки посчитать знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; -10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке выражение $x - 3 - y$ положительно, а $x - 3 + y$ отрицательно. Таким образом, неравенство принимает вид $(x - 3 - y) - (x - 3 + y) \leq 6$, откуда $y \geq -3$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит область, лежащая выше прямой $y = -3$ и ниже прямых $x - 3 - y = 0$, $x - 3 + y = 0$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем квадрат K с вершинами в точках $A(6; -3)$, $B(6; 3)$, $C(0; 3)$ и $D(0; -3)$ (см. рисунок).

Рассмотрим уравнение системы. При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ оно принимает вид $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, и мы получаем окружность радиуса 5 с центром в точке $(3; 4)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих

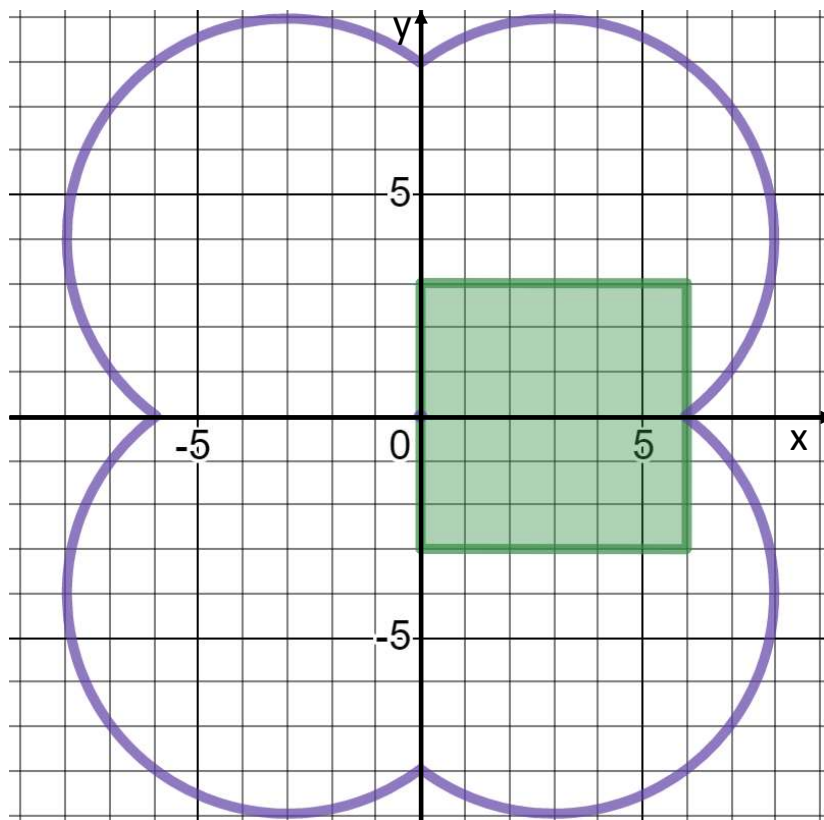


Рис. 2: вариант 1, задача 7

осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0; 0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Теперь становится видно, что множества имеют ровно две общие точки – т.е. система имеет два решения $(0; 0)$ и $(6; 0)$.

ВАРИАНТ 2

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0)$, $(-2\sqrt{3}; 6)$, $(-2\sqrt{3}; -6)$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся синица и снегирь $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{\pi}{2}$, и при этом $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$, $\beta_0 = -\frac{\pi}{6}$ – углы, соответствующие начальным расположениям птиц.

Расстояние между синицей и снегирём будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 2\sqrt{3}$ и $|AN_0| = 4\sqrt{3}$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = 2|AM_0|$, то угловая скорость синицы в 2 раза больше угловой скорости снегиря.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ снегирь продвинулся на угол ω . Тогда $\alpha_0 - 2\omega = \beta_0 + \omega + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\omega = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{3} - \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3}$, где $n = 0, -1, -2, \dots$

Различных точек будет три (при $n = 0, -1, -2$). Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\pi}{6} = 0$. Координаты положения снегиря найдём по формулам $x_N = 4\sqrt{3} \cos \beta_1 = 4\sqrt{3}$, $y_N = 4\sqrt{3} \sin \beta_1 = 0$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и имеют, соответственно, координаты $(-2\sqrt{3}; 6)$ и $(-2\sqrt{3}; -6)$.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: $(-1; 2)$, $(-2; 1)$, $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; -\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$.

Решение. Если $b = 0$, то второе уравнение системы принимает вид $1 = 0$, и поэтому решений у системы нет. При всех остальных значениях параметров в каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Следовательно, оба уравнения системы определяют некоторые прямые, и для существования бесконечного количества решений нужно, чтобы эти прямые совпадали. Это возможно при пропорциональности коэффициентов уравнений, т.е. при

$$\frac{2(a-b)}{3b} = \frac{6}{(a-b)b} = \frac{a}{1}. \quad (2)$$

Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных или свободные члены обращаются в ноль в обоих уравнениях². Рассматривая первое равенство из (??), получаем $(a-b)^2 = 9$, $a = b \pm 3$. Далее подставим это во второе равенство (??):

– если $a = b + 3$, то $\frac{2}{b} = b + 3$, $b^2 + 3b - 2 = 0$, $b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$; отсюда получаем два решения системы: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; -\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$;

²Вообще говоря, это существенное замечание. Например, уравнения $y + 8 = 0$ и $2y + 16 = 0$ задают одну и ту же прямую.

– если $a = b - 3$, то $-\frac{2}{b} = b - 3$, $b^2 - 3b + 2 = 0$, $b = 1$ или $b = 2$; отсюда получаем ещё два решения системы: $(-2; 1)$, $(-1; 2)$.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

Ответ: 3; $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$.

Решение. Раскладывая правую часть на множители, получаем $(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(2x-4)$. Отсюда есть две возможности: либо $x+5=0$ (тогда $x=-5$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3-16x+25 = (2x-4)^2, \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+9 = 0, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2-x-3) = 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x=3$, $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, и из них неравенству удовлетворяют $x=3$ и $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4+x^2+2x-5x^2|x+1|+1 \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $6x^4+(x+1)^2-5x^2|x+1| \geq 0$ или $|x+1|^2-5x^2|x-1|+6x^4 \geq 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y=|x+1|$ с дискриминантом, равным $(5x^2)^2-4 \cdot 6x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{5x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1=3x^2$ и $y_2=2x^2$, а неравенство принимает вид $(|x+1|-3x^2)(|x+1|-2x^2) \geq 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A-B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} ((x+1)^2-9x^4)((x+1)^2-4x^4) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (3x^2+x+1)(3x^2-x-1)(2x^2+x+1)(2x^2-x-1) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (3x^2-x-1)(2x^2-x-1) &\geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty). \end{aligned}$$

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7 000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ: 5 600.

Решение. Ввиду того, что $7\,000 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три двойки, три пятёрки, одна семёрка и одна единица, (б) четвёрка, двойка, три пятёрки, одна семёрка и две единицы или (в) восьмёрка, три пятёрки, одна семёрка и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения двоек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем три места из пяти оставшихся для размещения пятёрок ($C_5^3 = \frac{5!}{3!2!}$ способов), затем одно место из двух оставшихся для семёрки ($C_2^1 = 2$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = \frac{8!}{3!3!} = 1\,120$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!3!} = 3\,360$.

(в) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{3!3!} = 1\,120$.
Окончательно получаем $1\,120 + 3\,360 + 1\,120 = 5\,600$ способов.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

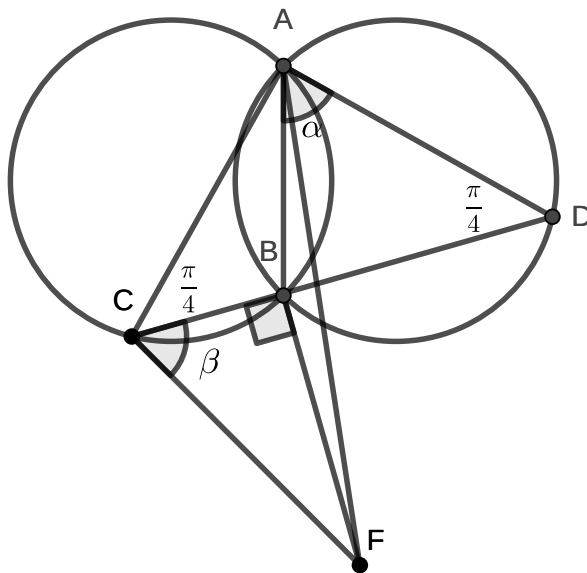


Рис. 3: вариант 2, задача 6

Ответ: 14.

Решение. Пусть $R = 7$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R \cos \alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 14$.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |x - y + 5| \leq 10, \\ (|x| - 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 169. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0)$, $(-10; 0)$.

Решение. Рассмотрим неравенство системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x + y + 5 = 0$ и $x - y + 5 = 0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки посчитать знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; -10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке выражение $x - y + 5$ положительно, а $x + y + 5$ отрицательно. Таким образом, неравенство принимает вид $-(x + y + 5) + (x - y + 5) \leq 10$, откуда $y \geq -5$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит область, лежащая выше прямой $y = -5$ и ниже прямых $x + y + 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем квадрат K с вершинами в точках $A(0; -5)$, $B(0; 5)$, $C(-10; 5)$ и $D(-10; -5)$ (см. рисунок).

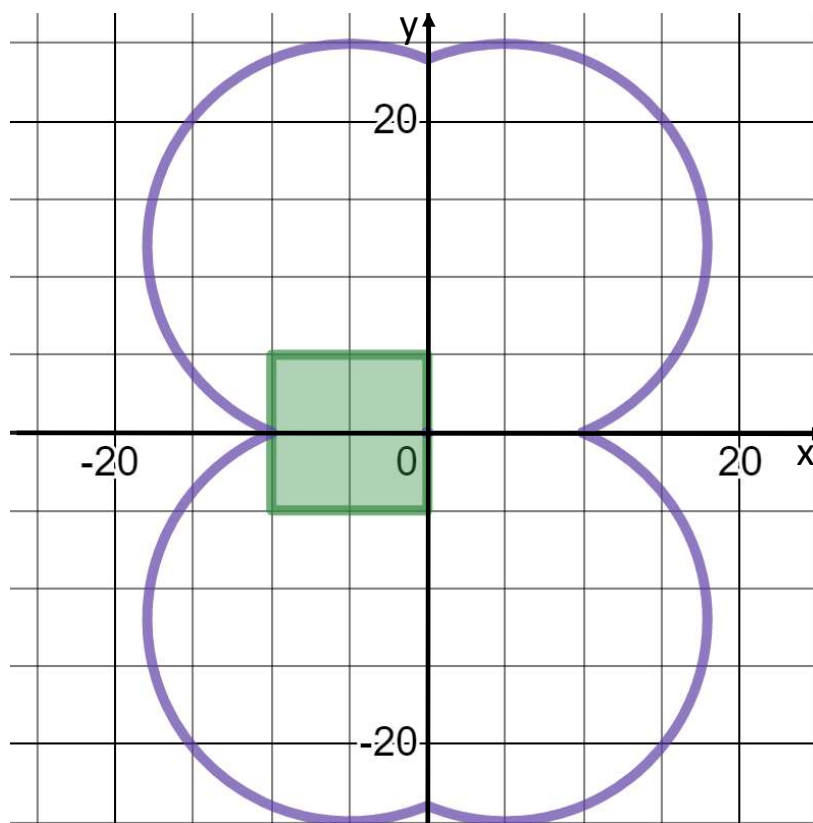


Рис. 4: вариант 2, задача 7

Рассмотрим уравнение системы. При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ оно принимает вид $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$, и мы получаем окружность радиуса 13 с центром в точке $(5; 12)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0; 0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Теперь становится видно, что множества имеют ровно две общие точки – т.е. система имеет два решения $(0; 0)$ и $(-10; 0)$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(4 балла)** Найдены радиусы обеих окружностей баллы не добавляются;
 Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями ... 2 балла;
 составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты 1 балл.
2. **(4 балла)** Записано условие, при котором система уравнений имеет бесконечно много решений (пропорциональность коэффициентов уравнения или эквивалентное условие) 1 балл;
 записано условие пропорциональности, но не учтено, что оба коэффициента при одной переменной могут равняться нулю снять 1 балл;
 предполагается, что уравнения системы должны быть одинаковы 0 баллов за задачу;
 неэквивалентное преобразование системы (исходной или новой системы уравнений относительно параметров) не более 1 балла за задачу;
 потеряно хотя бы одно решение не более 2 баллов за задачу.
3. **(4 балла)** Уравнение сведено к кубическому 1 балл;
 сокращение обеих частей уравнения на линейную функцию произведено без проверки .. снять 1 балл;
 получен один лишний корень не более 2 баллов за задачу;
 получено более одного лишнего корня не более 1 балла за задачу.
4. **(6 баллов)** При решении рассмотрением двух случаев: по 3 балла за каждый случай;
 при другом способе решения: левая часть неравенства разложена на множители 3 балла.
5. **(4 балла)** За рассмотрение каждого из случаев по 1 баллу (при этом балл ставится, даже если результат в случае не сведён к числу);
6. **(5 баллов)** Доказано, что треугольник ACD равнобедренный прямоугольный (или найден один из его острых углов) 1 балл;
 при решении считается, что точка B – середина CD не более 1 балла за задачу.
7. **(6 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих неравенству системы .. 3 балла;
 если при этом стороны квадрата не параллельны осям координат не более 2 баллов за задачу;
 изображено множество точек, удовлетворяющих уравнению системы 2 балла;
 если при этом потеряно начало координат, то 1 балл вместо 2 баллов;
 неверный ответ вследствие неарифметической ошибки не более 4 баллов за задачу.

ВАРИАНТ 9

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Пчела движется по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2; 0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

Ответ: $(\sqrt{3}; 1), (-1; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -1), (1; -\sqrt{3})$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся пчела и шмель $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{2\pi}{3}$, и при этом $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$, $\beta_0 = 0$ – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

Расстояние между шмелём и пчелой будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 1$ и $|AN_0| = 2$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = 2|AM_0|$, то угловая скорость пчелы в 3 раза больше угловой скорости шмеля.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ шмель продвинулся на угол ω . Тогда $\alpha_0 - 3\omega + 2\pi k = \beta_0 + \omega$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\omega = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

Различных точек будет четыре (при $k = 0, 1, 2, 3$). Для $k = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Координаты положения шмеля найдём по формулам $x_N = 2 \cos \beta_1 = \sqrt{3}$, $y_N = 2 \sin \beta_1 = 1$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты $(-1; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -1)$, $(1; -\sqrt{3})$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: $(-6; -1; -8), (-3; -2; -4), (3; 2; 4)$.

Решение. Система двух линейных уравнений не имеет решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных в уравнениях пропорциональны друг другу, но при этом не пропорциональны свободным членам. Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных обращаются в ноль в обоих уравнениях¹. Получаем

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{b} = \frac{c}{4} \neq \frac{c}{4b}. \quad (1)$$

Из первого равенства следует, что $ab = 6$, а из второго – что $bc = 8$. Так как числа a , b и c целые, отсюда следует, что число b является делителем двойки. Таким образом, возможны четыре варианта:

$$b = 1 \Rightarrow a = 6, c = 8;$$

$$b = -1 \Rightarrow a = -6, c = -8;$$

$$b = -2 \Rightarrow a = -3, c = -4;$$

¹Вообще говоря, это существенное замечание. Например, система уравнений $x + z = -7$ и $3x + 3z = -8$ не имеет решений.

$$b = 2 \Rightarrow a = 3, c = 4.$$

Из них подходят все кроме первого – тогда нарушается неравенство в (??). Итак, условию задачи удовлетворяют три тройки целых чисел: $(-6; -1; -8)$, $(-3; -2; -4)$, $(3; 2; 4)$.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$.

Ответ: $x = -1 + \sqrt{15}$.

Решение. Первый множитель в левой части положителен при любых допустимых значениях x . Так как второй множитель всегда неотрицателен, неравенство на ОДЗ (т.е. при условии $x^3 - 10x + 7 \geq 0$) равносильно уравнению $x^3 - 18x + 28 = 0$. Одним из целых корней уравнения является $x = 2$ (несложно найти подбором среди делителей свободного члена уравнения). Выполнив деление левой части на многочлен $x - 2$, раскладываем её на множители: $(x - 2)(x^2 + 2x - 14) = 0$. Отсюда $x = 2$ или $x = -1 \pm \sqrt{15}$.

Подставляем полученные значения x в неравенство $x^3 - 10x + 7 \geq 0$ для проверки:

$$x = 2 \Rightarrow 8 - 20 + 7 \geq 0 - \text{неверно};$$

$$x = -1 + \sqrt{15} \Rightarrow (-1 + \sqrt{15})^3 - 10(-1 + \sqrt{15}) + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{15} - 29 \geq 0 - \text{верно};$$

$$x = -1 - \sqrt{15} \Rightarrow (-1 - \sqrt{15})^3 - 10(-1 - \sqrt{15}) + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -8\sqrt{15} - 29 \geq 0 - \text{неверно}.$$

Следовательно, подходит единственное значение $x = -1 + \sqrt{15}$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0$.

Ответ: $-\frac{3}{2}; 1; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Решение. Уравнение можно переписать в виде $2x^4 + (x - 3)^2 - 3x^2|x - 3| = 0$ или $|x - 3|^2 - 3x^2|x - 3| + 2x^4 = 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x - 3|$ с дискриминантом, равным $(3x^2)^2 - 4 \cdot 2x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{3x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1 = 2x^2$ и $y_2 = x^2$, а уравнение принимает вид $(|x - 3| - 2x^2)(|x - 3| - x^2) = 0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Отсюда получаем

$$\begin{cases} x^2 = x - 3, \\ x^2 = -x + 3, \\ 2x^2 + x - 3 = 0, \\ 2x^2 - x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0, \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x = -1.5, \\ x = 1. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Бросили 70 игровых костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

Ответ: Больше вероятность того, что сумма не больше 140.

Решение. Результат броска кубиков можно описать набором из 70 чисел от 1 до 6. Рассмотрим какой-либо такой набор. Если каждое из чисел набора заменить с x на $7 - x$, получим новый набор, состоящий из чисел от 1 до 6. При этом если сумма чисел в исходном наборе была S , то она станет равной $490 - S$. То есть каждому набору с суммой S мы можем поставить в соответствие набор с суммой $490 - S$.

Так как $140 + 350 = 490$, то количество наборов с суммой больше 350 равно количеству наборов с суммой меньше 140. Отметим также, что все наборы равновероятны. Значит, вероятность выбросить больше 350 равна вероятности выбросить меньше 140. Но вероятность выбросить не больше 140 очков выходит больше выше рассмотренных, так как добавляются способы, в

которых сумма составляет ровно 140 очков. Поэтому больше вероятность того, что сумма не превосходит 140.

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{6}{5}$.

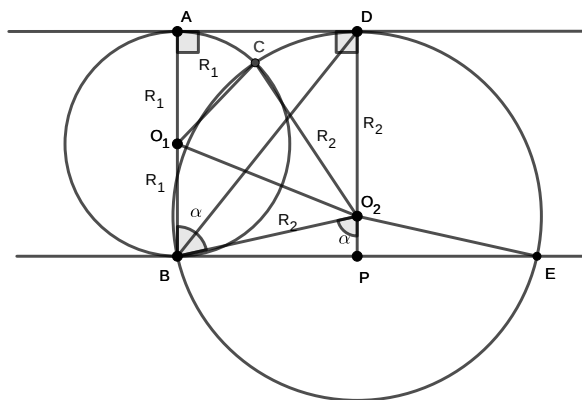


Рис. 1: вариант 9, задача 6

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P . Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{BO_1O_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 \cdot \sin \alpha = R_1 R_2 \sin \alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2} O_2P \cdot BE = \frac{1}{2} R_2 \cos \alpha \cdot 2R_2 \sin \alpha = R_2^2 \sin \alpha \cos \alpha$. Значит, $\frac{5}{4} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2 \cos \alpha}$, то есть $\frac{4}{5} R_1 = R_2 \cos \alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2 \cos \alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{4}{5} R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{6}{5}$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in (-12; -6) \cup \{0\} \cup (6; 12)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ оно принимает вид $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, и мы получаем окружность радиуса 5 с центром в точке $(4; 3)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0; 0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Первое уравнение может быть записано в виде $(x - a)^2 + (y - 3)^2 = 9$. Оно определяет окружность радиуса 3 с центром в точке $(a; 3)$. В зависимости от a центр этой окружности перемещается по прямой $y = 3$. Система имеет два решения тогда и только тогда, когда эта окружность имеет ровно две общие точки с множеством, заданным вторым уравнением. Это возможно (см. чертёж) при $a \in (-12; -6) \cup \{0\} \cup (6; 12)$.

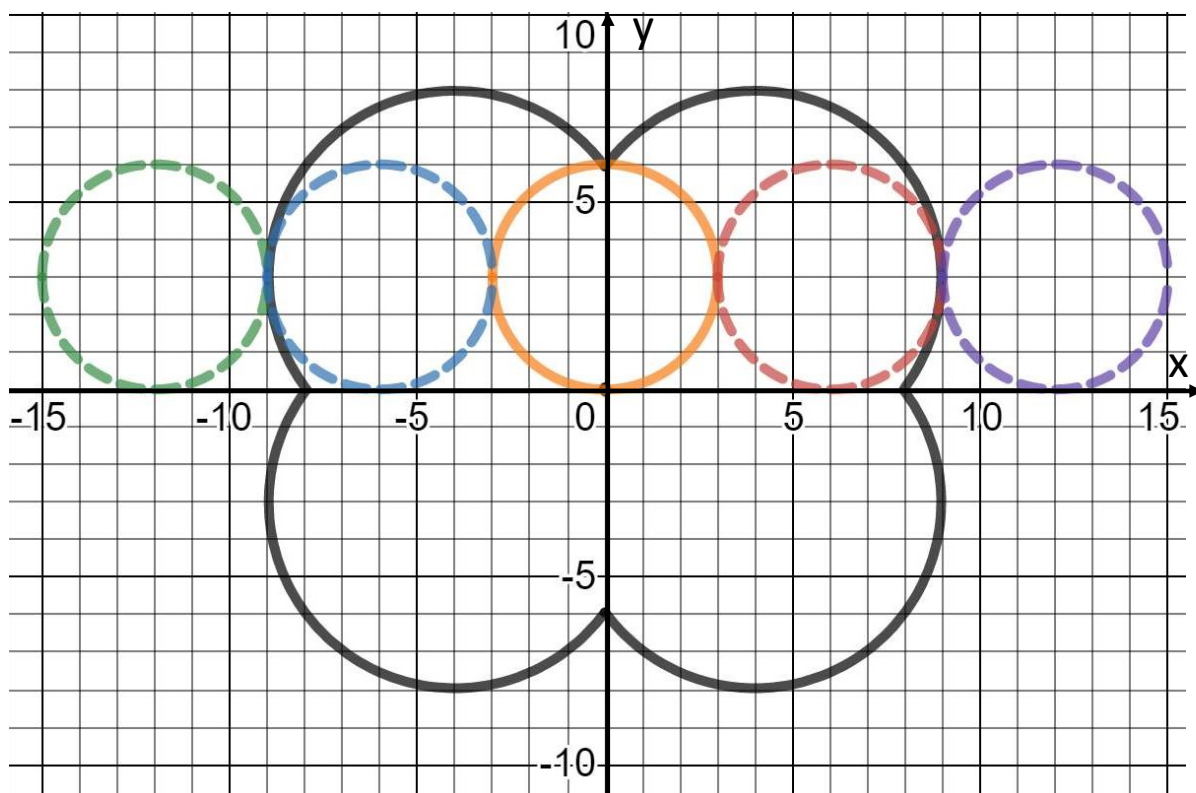


Рис. 2: вариант 9, задача 7

ВАРИАНТ 10

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Котёнок движется по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6; 0)$ и $N_0(2; 2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

Ответ: $(-3\sqrt{3}; 3)$, $(3; 3\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}; -3)$, $(-3; -3\sqrt{3})$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся котёнок и щенок $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{2\pi}{3}$, и при этом $\alpha_0 = \pi$, $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$ – углы, соответствующие начальным расположениям животных.

Расстояние между щенком и котёнком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 6$ и $|AN_0| = 4$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = \frac{1}{2} |AM_0|$, то угловая скорость щенка в 3 раза больше угловой скорости котёнка.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ котёнок продвинулся на угол ω . Тогда $\alpha_0 - \omega + 2\pi k = \beta_0 + 3\omega$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\omega = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

Различных точек будет четыре (при $k = 0, 1, 2, 3$). Для $k = 0$ получаем $\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Координаты положения котёнка найдём по формулам $x_N = 6 \cos \alpha_1 = -3\sqrt{3}$, $y_N = 6 \sin \alpha_1 = 3$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат по часовой стрелке на углы $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты $(3; 3\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}; -3)$, $(-3; -3\sqrt{3})$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: $(-2; 5; 1)$, $(2; -5; -1)$, $(10; -1; -5)$.

Решение. Система двух линейных уравнений не имеет решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных в уравнениях пропорциональны друг другу, но при этом не пропорциональны свободным членам. Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных обращаются в ноль в обоих уравнениях². Получаем

$$\frac{2}{a} = \frac{-b}{5} = \frac{1}{-c} \neq \frac{2b}{a}. \quad (2)$$

Из первого равенства следует, что $ab = -10$, а из второго – что $bc = 5$. Так как числа a , b и c целые, отсюда следует, что число b является делителем пятёрки. Таким образом, возможны четыре варианта:

$$b = 1 \Rightarrow a = -10, c = 5;$$

$$b = -1 \Rightarrow a = 10, c = -5;$$

$$b = -5 \Rightarrow a = 2, c = -1;$$

$$b = 5 \Rightarrow a = -2, c = 1.$$

Из них подходят все кроме первого – тогда нарушается неравенство в (??). Итак, условию задачи удовлетворяют три тройки целых чисел: $(-2; 5; 1)$, $(2; -5; -1)$, $(10; -1; -5)$.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$.

Ответ: $x = 1 - \sqrt{10}$.

Решение. Первый множитель в левой части положителен при любых допустимых значениях x . Так как второй множитель всегда неотрицателен, неравенство на ОДЗ (т.е. при условии $x^3 - 18x - 5 \geq 0$) равносильно уравнению $x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$. Одним из целых корней уравнения является $x = 2$ (несложно найти подбором среди делителей свободного члена уравнения). Выполнив деление левой части на многочлен $x - 2$, раскладываем её на множители: $(x - 2)(x^2 - 2x - 9) = 0$. Отсюда $x = 2$ или $x = 1 \pm \sqrt{10}$.

Подставляем полученные значения x в неравенство $x^3 - 18x - 5 \geq 0$ для проверки:

$$x = 2 \Rightarrow 8 - 36 - 5 \geq 0 - \text{неверно};$$

$$x = 1 + \sqrt{10} \Rightarrow (1 + \sqrt{10})^3 - 18(1 + \sqrt{10}) - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -5\sqrt{10} + 8 \geq 0 - \text{неверно};$$

$$x = 1 - \sqrt{10} \Rightarrow (1 - \sqrt{10})^3 - 18(1 - \sqrt{10}) - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{10} + 8 \geq 0 - \text{верно}.$$

Следовательно, подходит единственное значение $x = 1 - \sqrt{10}$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x + 3| + 9 = 0$.

Ответ: $-\frac{3}{4}$; 1 ; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

²Вообще говоря, это существенное замечание. Например, система уравнений $x + z = -7$ и $3x + 3z = -8$ не имеет решений.

Решение. Уравнение можно переписать в виде $4x^4 + (x+3)^2 - 5x^2|x+3| = 0$ или $|x+3|^2 - 5x^2|x+3| + 4x^4 = 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x+3|$ с дискриминантом, равным $(5x^2)^2 - 4 \cdot 4x^4 = 9x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{5x^2 \pm 3x^2}{2}$, т.е. $y_1 = 4x^2$ и $y_2 = x^2$, а уравнение принимает вид $(|x+3| - 4x^2)(|x+3| - x^2) = 0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Отсюда получаем

$$\begin{cases} 4x^2 = x+3, \\ 4x^2 = -x-3, \\ x^2 + x + 3 = 0, \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - x - 3 = 0, \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x = -0.75, \\ x = 1. \end{cases}$$

5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?

Ответ: Больше вероятность того, что сумма не меньше 300.

Решение. Результат броска кубиков можно описать набором из 60 чисел от 1 до 6. Рассмотрим какой-либо такой набор. Если каждое из чисел набора заменить с x на $7-x$, получим новый набор, состоящий из чисел от 1 до 6. При этом если сумма чисел в исходном наборе была S , то она станет равной $420 - S$. То есть каждому набору с суммой S мы можем поставить в соответствие набор с суммой $420 - S$.

Так как $120 + 300 = 420$, то количество наборов с суммой больше 300 равно количеству наборов с суммой меньше 120. Отметим также, что все наборы равновероятны. Значит, вероятность выбросить больше 300 равна вероятности выбросить меньше 120. Но вероятность выбросить не меньше 300 очков выходит больше выше рассмотренных, так как добавляются способы, в которых сумма составляет ровно 300 очков. Поэтому больше вероятность того, что сумма не меньше 300.

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{6}$.

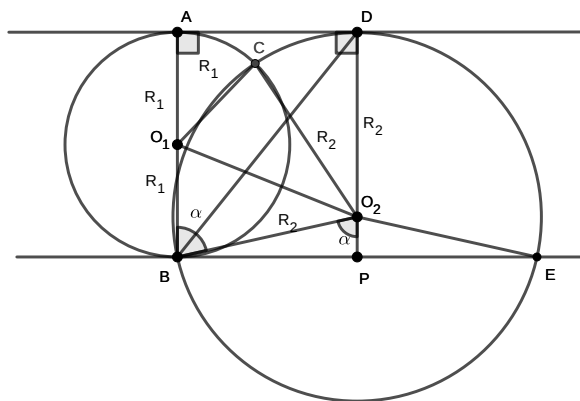


Рис. 3: вариант 10, задача 6

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P . Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1BO_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 \cdot \sin \alpha = R_1 R_2 \sin \alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2} O_2P \cdot BE = \frac{1}{2} R_2 \cos \alpha \cdot 2R_2 \sin \alpha = R_2^2 \sin \alpha \cos \alpha$. Значит, $\frac{6}{5} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2 \cos \alpha}$, то есть $\frac{5}{6} R_1 = R_2 \cos \alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2 \cos \alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{5}{6} R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{6}$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

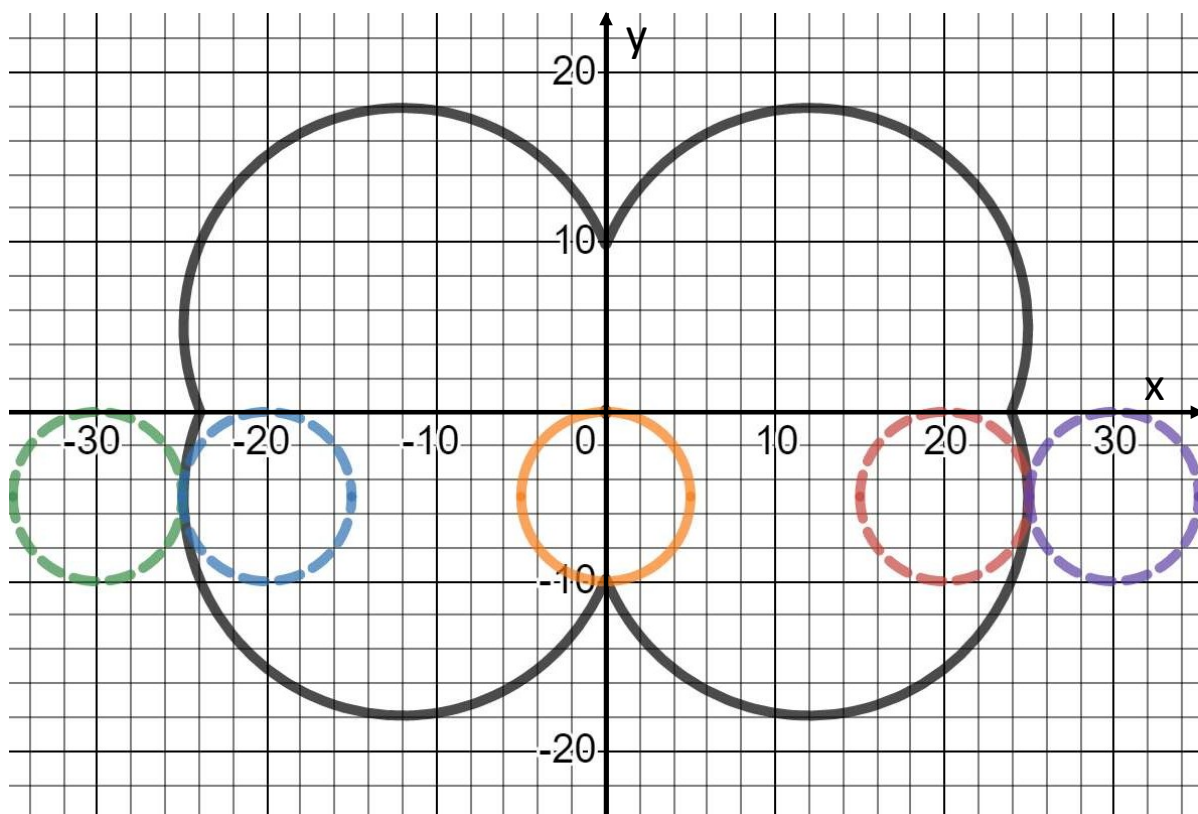


Рис. 4: вариант 10, задача 7

Ответ: $a \in (-30; -20) \cup \{0\} \cup (20; 30)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ оно принимает вид $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$, и мы получаем окружность радиуса 13 с центром в точке $(12; 5)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0; 0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырех дуг окружностей и начала координат.

Первое уравнение может быть записано в виде $(x - a)^2 + (y + 5)^2 = 25$. Оно определяет окружность радиуса 5 с центром в точке $(a; -5)$. В зависимости от a центр этой окружности перемещается по прямой $y = -5$. Система имеет два решения тогда и только тогда, когда эта

окружность имеет ровно две общие точки с множеством, заданным вторым уравнением. Это возможно (см. чертёж) при $a \in (-30; -20) \cup \{0\} \cup (20; 30)$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

-
1. **(4 балла)** Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями – 2 балла;

составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты – 1 балл.

2. **(4 балла)** Записано условие, при котором система не имеет решений (пропорциональность коэффициентов в левых частях уравнений и отсутствие пропорциональности левой и правой частей) – 2 балла;

получены лишние решения – не более 2 баллов за задачу.

3. **(4 балла)** Получена система из кубического уравнения и кубического неравенства – 1 балл;
решено кубическое уравнение – 1 балл;

сделан отбор корней – 2 балла;

не учтено ОДЗ – не более 1 балла за задачу.

4. **(5 баллов)** Левая часть уравнения разложена на множители – 2 балла;

рассмотрено равенство нулю только одного из двух получившихся множителей – 1 балл.

При другом способе решения (раскрытие модуля по определению в исходном уравнении): рассмотрен только один случай раскрытия модуля – 2 балла.

5. **(5 баллов)** Показано, что вероятность выпадения суммы k очков и $490 - k$ (или $420 - k$) очков одинаковы – 3 балла.
-

6. **(4 балла)** Отношение площадей выражено через отношение радиусов и тригонометрическую функцию – 2 балла.
-

7. **(7 баллов)** Описано множество, задаваемое первым уравнением системы – 1 балл;

построено множество точек, удовлетворяющих второму уравнению системы – 3 балла

– если при этом потеряно начало координат, то 2 балла вместо 3;

найден значение $a = 0$ – 1 балл;

найжены два промежутка значений параметра – 2 балла;

– если при этом получены отрезки вместо интервалов, то 1 балл вместо 2.