ВАРИАНТ 5

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3 375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ. 1 680.

Решение. Ввиду того, что $3\,375 = 3^3 \cdot 5^3$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три тройки, три пятёрки и две единицы или (б) тройка, девятка, три пятёрки и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения троек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем три места из пяти оставшихся для размещения пятёрок ($C_5^3 = \frac{5!}{3!2!}$ способов). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{3!3!} = 1\,120$.

Окончательно получаем $560 + 1\,120 = 1\,680$ способов.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$-2\sin 4x \sin 7x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x \Leftrightarrow -2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\left(\cos^2 7x - \sin^2 7x\right) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 7x + \sin 7x = 0, \\ \cos 7x - \sin 7x = -\sqrt{2}\sin 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 7x = -1, \\ \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi k, \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Окончательно получаем $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(2;2)$, $(9;3)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Решение. Логарифмируем первое уравнение системы по основанию 10:

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right) \cdot \lg x = \lg y^2 \cdot \lg(xy).$$

Это уравнение на области допустимых значений равносильно следующему:

$$(5\lg y - \lg x)\lg x = 2\lg y(\lg x + \lg y) \Leftrightarrow \lg^2 x - 3\lg y \lg x + 2\lg^2 y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lg x - \lg y)(\lg x - 2\lg y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x - y^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y, \\ x = y^2. \end{array}\right.$$

Записываем второе уравнение в виде $x^2 - 2x(y+2) + 12y - 3y^2 = 0$ и решаем его как квадратное относительно переменной x:

$$\frac{D}{4}=(y+2)^2-\left(12y-3y^2\right)=4y^2-8y+4=(2y-2)^2\Rightarrow x=y+2\pm(2y-2).$$

Значит, $x=3y$ или $x=4-y$. Далее возможны четыре случая:

а) $\begin{cases}x=y,\\ x=3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\begin{cases}x=y,\\ x=4-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=2.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x=y^2,\\ x=3y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x=9,\\ y=3.\end{cases}\end{array}\right.$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

г) $\begin{cases}x=y^2,\\ x=4-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-y,\\ y^2+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-y,\\ y=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{9-\sqrt{17}}{2},\\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{9+\sqrt{17}}{2},\\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$

Точка $\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$ не удовлетворяет ОДЗ.

Объединяя результаты, получаем итоговый ответ: $(2;2)$, $(9;3)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

Ответ: $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{3}$, $S=\frac{16}{9}$.

Решение. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Пусть радиус сферы равен r. Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK=OL=OM=R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO=\angle LSO=\angle MSO$ (пусть $\angle KSO=\alpha$, $SO=x$). Высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть β и γ касательные плоскости к сфере, проходящие через точки P и Q, а E и F – точки пересечения этих плоскостей с прямой SK. По условию площади сечений трёхгранного угла этими плоскостями равны соответственно $S_1=1$ и $S_2=4$. Рассмотрим сечение трехгранного угла и сферы плоскостью SKO (см. рис. и обозначения на нем). Так как $SH\perp HK$ и $SH\perp HL$, то $\tau\perp SH$. Тогда сечения трёхгранного угла плоскостями τ, β и γ – подобные треугольники, плоскости которых параллельны (все они перпендикулярны SO).

Если Σ – площадь треугольника, получающегося в сечении трёхгранного угла плоскостью KLM, то из подобия $\Sigma:S_1:S_2=KH^2:EP^2:FQ^2$. Следовательно, $EP:FQ=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$. Тогда $\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}=SP:SQ=(x-r):(x+r)$, откуда $r=x\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}$, а $\sin\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}=\frac{1}{3}$. Отсюда $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{3}$.

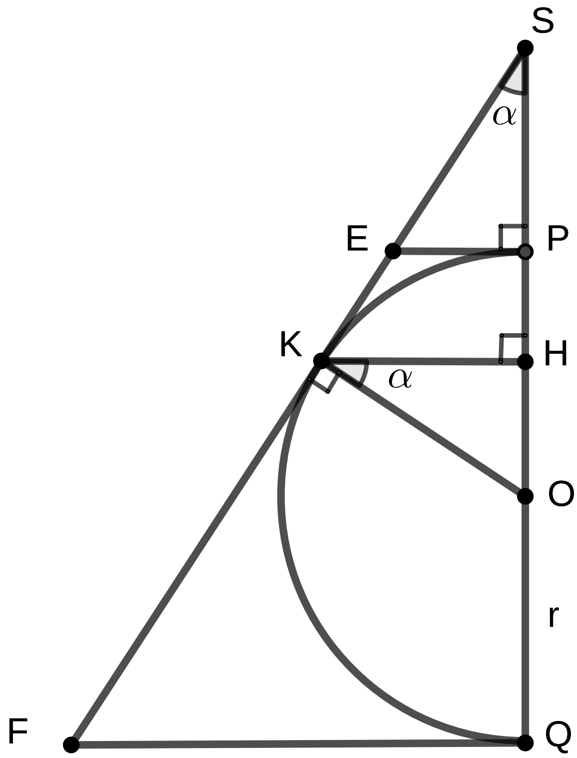

Рис. 1: вариант 5, задача 4

Далее, $OH = r\sin\alpha$, $SH = SO - OH = \frac{r}{\sin\alpha} - r\sin\alpha$, $SP = SO - r = \frac{r}{\sin\alpha} - r$. Значит, $\Sigma : S_1 = KH^2 : EP^2 = SH^2 : SP^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)^2 : \left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1+\sin\alpha)^2 = \frac{16}{9}$, откуда $\Sigma = \frac{16}{9}$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{1; 25\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y-3-x=0$ и $y-3+x=0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0;-10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y-3-x$ и $y-3+x$ отрицательны. Таким образом, уравнение принимает вид $-(y-3-x)-(y-3+x)=6$, откуда $y=0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(3;0)$ и $D(-3;0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(3;0)$, $B(3;6)$, $C(-3;6)$ и $D(-3;0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y<0$, поэтому можно считать, что $y \geqslant 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x|-4)^2 + (y-3)^2 = a$ (опустив модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a<0$, у уравнения нет решений. При $a=0$ оно задаёт две точки $(4;3)$ и $(-4;3)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K, система не имеет решений, и значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a>0$.

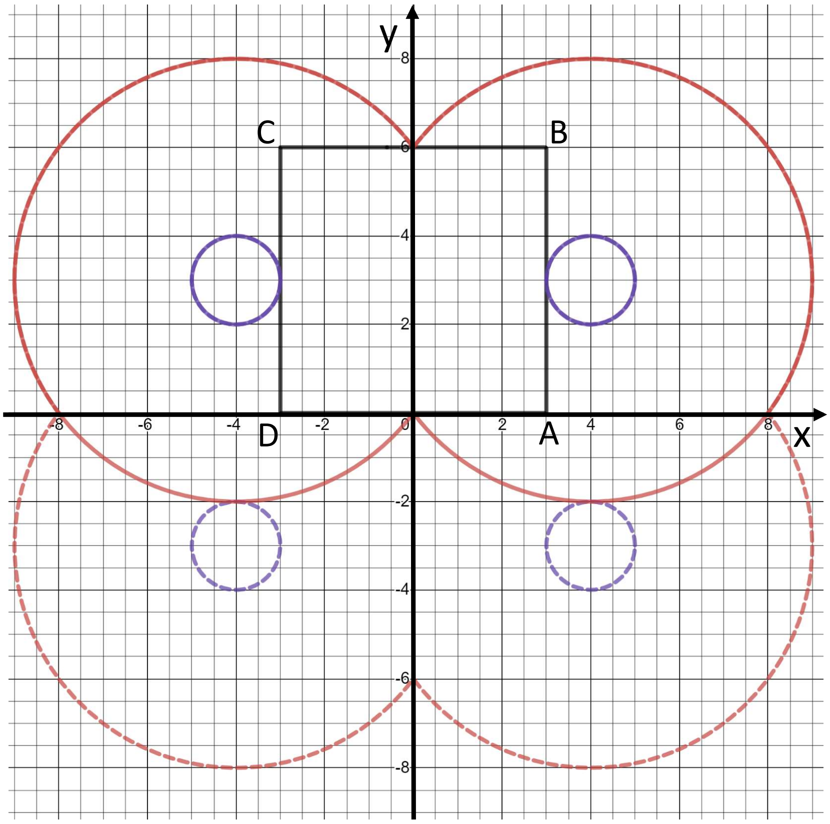

Рис. 2: вариант 5, задача 5

При $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид $(x-4)^2+(y-3)^2=a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(4;3)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geqslant 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy. Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy.

Если $0<a<1$, график $(|x|-4)^2+(y-3)^2=a$ не пересекает квадрат K, и система уравнений не имеет решений. Если $a=1$, система уравнения имеет два решения – точки $X(3;3)$ и $Y(-3;3)$. Если $a \in (1,10]$, дуга окружности $(x-4)^2+(y-3)^2=a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезок AB дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (10,25)$, дуга окружности $(x-4)^2+(y-3)^2=a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a=25$, система уравнений имеет два решения – точки $(0;0)$ и $(0;6)$. Наконец, если $a>25$, дуга окружности $(x-4)^2+(y-3)^2=a$, $x \geqslant 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a=1$ и $a=25$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

Ответ: а) $CF = 10$; б) $S_{ACF} = 49$.

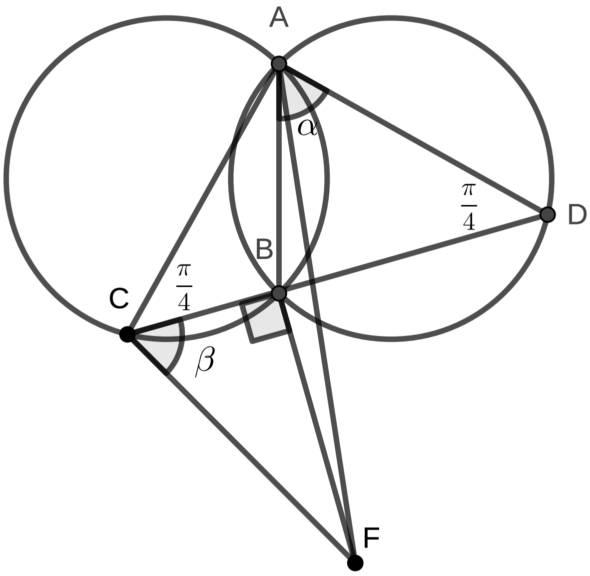

Рис. 3: вариант 5, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 5$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 10$.

б) Так как $\operatorname{tg}\beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\beta = \alpha$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB, поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CF \cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = 2R^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = R^2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right) = R^2(1 + \sin 2\alpha) = R^2\left(1 + 2\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\right)$, где $\cos\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{3}{5}$. Значит, $S_{ACF} = 49$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + \left(2^{64} - 1\right) x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Ответ. $61 \cdot 2^{69} + 2144$.

Решение. Пусть $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$, $g(x) = 70 + \left(2^{64} - 1\right) x$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вниз, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Координаты обеих точек легко подобрать. Действительно, $f(6) = 2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 64 + 6 \cdot 2^{64} = 70 + \left(2^{64} - 1\right) 6 = g(6)$ и $f(70) = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 2^6 \cdot 2^{64} + 6 \cdot 2^{64} = 70 + \left(2^{64} - 1\right) 70 = g(70)$. На промежутке $6 < x < 70$ график $f(x)$ лежит ниже графика $g(x)$. Поэтому система имеет целочисленные решения только при целых $x \in [7; 69]$ (так как первое неравенство системы строгое, точки пересечения графиков не являются решениями системы).

Заметим, что на отрезке $[7; 69]$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ лежат выше оси Ox. Поэтому искомое количество целочисленных точек мы получим, если из количества S_1 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $g(x)$ на отрезке $[7; 69]$, вычтем

количество S_2 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $f(x)$ на отрезке $[7;69]$. При этом мы учтём, что первое неравенство системы строгое, а второе – нет.

Найдём S_1. Так как на отрезке $[7;69]$ лежат $69-7+1=63$ целочисленные точки, то $S_1 = 70\cdot 63+\left(2^{64}-1\right)(7+8+\ldots+69) = 70\cdot 63+\left(2^{64}-1\right)\cdot 38\cdot 63 = 32\cdot 63+2^{64}\cdot 38\cdot 63 = 2016+2^{65}\cdot 1197$.

Найдём S_2. Имеем: $S_2 = \left(2^7+3\cdot 2^{65}\right)+\left(2^8+3\cdot 2^{65}\right)+\ldots+\left(2^{69}+3\cdot 2^{65}\right) = 2^7+2^8+\ldots+2^{69}+3\cdot 2^{65}\cdot 63 = 2^{70}-2^7+3\cdot 2^{65}\cdot 63 = 2^5\cdot 2^{65}-128+189\cdot 2^{65} = 221\cdot 2^{65}-128$.

Искомое количество равно $S_1-S_2 = 2016+2^{65}\cdot 1197-\left(221\cdot 2^{65}-128\right) = 2144+(1197-221)\cdot 2^{65} = 2144+976\cdot 2^{65} = 2144+61\cdot 2^{69}$.

ВАРИАНТ 6

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16 875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ: 1 120.

Решение. Ввиду того, что $16\,875 = 3^3 \cdot 5^4$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три тройки, четыре пятёрки и одна единица или (б) тройка, девятка, четыре пятёрки и две единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения троек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем одно место из пяти оставшихся для размещения единицы ($C_5^1 = 5$ способов). Наконец, оставшиеся места занимают пятёрки. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 5 = 280$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{4!2!} = 840$.

Окончательно получаем $280 + 840 = 1\,120$ способов.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 10x \Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\left(\cos^2 5x - \sin^2 5x\right) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 5x - \sin 5x = 0, \\ \cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2}\cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 5x = 1, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ 5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k, \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Окончательно получаем $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 2)$, $(-2; 2)$, $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Решение. Логарифмируем первое уравнение системы по основанию 10:

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \cdot \lg y = \lg(-x) \cdot \lg(-xy).$$

Это уравнение на области допустимых значений равносильно следующему:

$$(4\lg(-x) - 2\lg y)\lg y = \lg(-x)(\lg(-x) + \lg y) \Leftrightarrow \lg^2(-x) - 3\lg y \lg(-x) + 2\lg^2 y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lg(-x) - \lg y)(\lg(-x) - 2\lg y) = 0 \Leftrightarrow (-x - y)\left(-x - y^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y, \\ x = -y^2. \end{array}\right.$$

Записываем второе уравнение в виде $x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$ и решаем его как квадратное относительно переменной x:

$$D=(y+4)^2-4\left(8y-2y^2\right)=y^2+8y+16-32y+8y^2=(3y-4)^2 \Rightarrow x=\frac{-(y+4)\pm(3y-4)}{2}.$$

Значит, $x=-2y$ или $x=y-4$. Далее возможны четыре случая:

а) $\begin{cases} x=-y, \\ x=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\begin{cases} x=-y, \\ x=y-4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=-y^2, \\ x=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4, \\ y=2. \end{cases} \end{array}\right.$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

г) $\begin{cases} x=-y^2, \\ x=y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4, \\ y^2+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4, \\ y=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{-9+\sqrt{17}}{2}, \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-9-\sqrt{17}}{2}, \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$

Точка $\left(\frac{-9-\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$ не удовлетворяет ОДЗ.

Объединяя результаты, получаем итоговый ответ: $(-4;2)$, $(-2;2)$, $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

Ответ: $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{5}$; $S=\frac{144}{25}$.

Решение. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Пусть радиус сферы равен r. Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK=OL=OM=R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO=\angle LSO=\angle MSO$ (пусть $\angle KSO=\alpha$, $SO=x$). Высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть β и γ касательные плоскости к сфере, проходящие через точки P и Q, а E и F – точки пересечения этих плоскостей с прямой SK. По условию площади сечений трёхгранного угла этими плоскостями равны соответственно $S_1=4$ и $S_2=9$. Рассмотрим сечение трехгранного угла и сферы плоскостью SKO (см. рис. и обозначения на нем). Так как $SH\perp HK$ и $SH\perp HL$, то $\tau\perp SH$. Тогда сечения трёхгранного угла плоскостями τ, β и γ – подобные треугольники, плоскости которых параллельны (все они перпендикулярны SO).

Если Σ – площадь треугольника, получающегося в сечении трёхгранного угла плоскостью KLM, то из подобия $\Sigma:S_1:S_2=KH^2:EP^2:FQ^2$. Следовательно, $EP:FQ=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$. Тогда $\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}=SP:SQ=(x-r):(x+r)$, откуда $r=x\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}$, а $\sin\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}=\frac{1}{5}$. Отсюда $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{5}$.

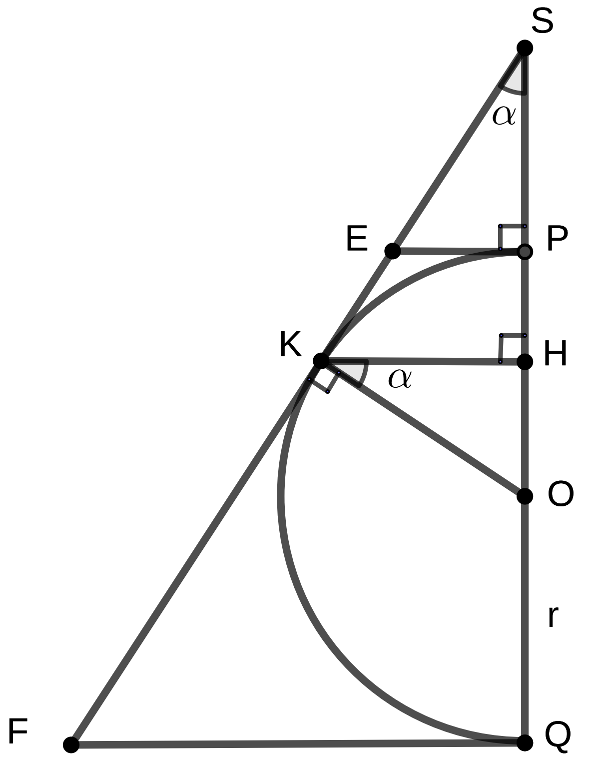

Рис. 4: вариант 6, задача 4

Далее, $OH = r\sin\alpha$, $SH = SO - OH = \frac{r}{\sin\alpha} - r\sin\alpha$, $SP = SO - r = \frac{r}{\sin\alpha} - r$. Значит, $\Sigma : S_1 = KH^2 : EP^2 = SH^2 : SP^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)^2 : \left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1+\sin\alpha)^2 = \frac{36}{25}$, откуда $\Sigma = \frac{144}{25}$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{4; 100\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x-6-y=0$ и $x-6+y=0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную слева от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(-10;0)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $x-6-y$ и $x-6+y$ отрицательны. Таким образом, уравнение принимает вид $-(x-6-y)-(x-6+y)=12$, откуда $x=0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(0;-6)$ и $D(0;6)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(0;-6)$, $B(12;-6)$, $C(12;6)$ и $D(0;6)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $x<0$, поэтому можно считать, что $x \geqslant 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(x-6)^2+(|y|-8)^2=a$ (опустив модуль у переменной x). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a<0$, у уравнения нет решений. При $a=0$ оно задаёт две точки $(6;8)$ и $(6;-8)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K, система не имеет решений, и значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a>0$.

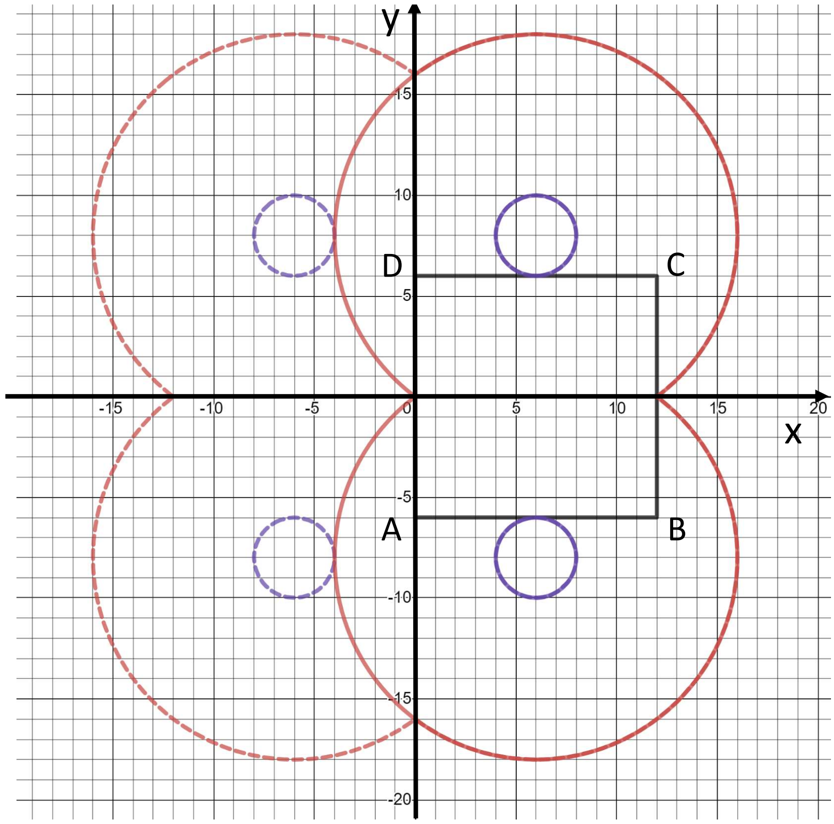

Рис. 5: вариант 6, задача 5

При $y \geqslant 0$ уравнение принимает вид $(x-6)^2+(y-8)^2=a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(6;8)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $y \geqslant 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены y на $(-y)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Ox. Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Ox.

Если $0<a<4$, график $(x-6)^2+(|y|-8)^2=a$ не пересекает квадрат K, и система уравнений не имеет решений. Если $a=4$, система уравнения имеет два решения – точки $X(6;-6)$ и $Y(6;6)$. Если $a \in (4,40]$, дуга окружности $(x-6)^2+(|y|-8)^2=a$, $y \leqslant 0$ пересекает отрезок AB дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Ox, образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (40,100)$, дуга окружности $(x-6)^2+(|y|-8)^2=a$, $y \leqslant 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с отрицательной ординатой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Ox, образуют 4 различных решения системы. Если $a=100$, система уравнений имеет два решения – точки $(0;0)$ и $(12;0)$. Наконец, если $a>100$, дуга окружности $(x-6)^2+(|y|-8)^2=a$, $y \leqslant 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a=4$ и $a=100$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

Ответ: а) $CF = 26$; б) $S_{ACF} = 289$.

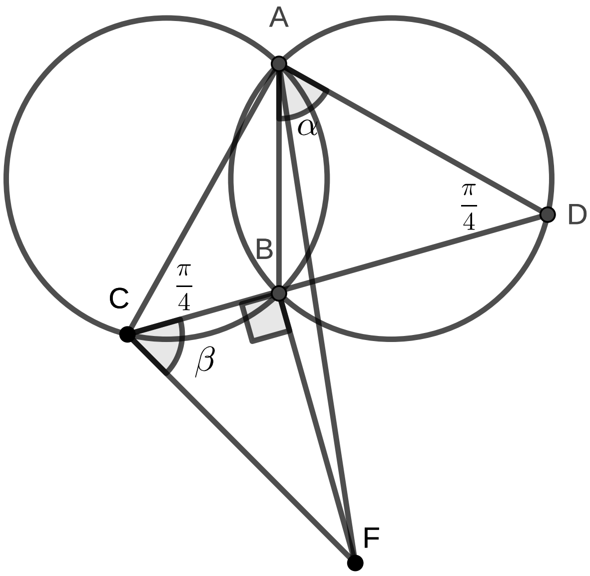

Рис. 6: вариант 6, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 13$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 26$.

б) Так как $\operatorname{tg}\beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\beta = \alpha$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB, поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2}\cdot CA\cdot CF\cdot\sin\angle ACF = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) = 2R^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = R^2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right) = R^2(1+\sin 2\alpha) = R^2\left(1 + 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right)$, где $\cos\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{5}{13}$. Значит, $S_{ACF} = 289$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + \left(3^{81} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Ответ. $\frac{79\cdot 3^{85} + 6723}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = 3^x + 4\cdot 3^{81}$, $g(x) = 85 + \left(3^{81}-1\right)x$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вниз, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Координаты обеих точек легко подобрать. Действительно, $f(4) = 3^4 + 4\cdot 3^{81} = 85 + \left(3^{81}-1\right)4 = g(4)$ и $f(85) = 3^{85} + 4\cdot 3^{81} = 81\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} = 85 + \left(3^{81}-1\right)85 = g(85)$. На промежутке $4 < x < 85$ график $f(x)$ лежит ниже графика $g(x)$. Поэтому система имеет целочисленные решения только при целых $x \in [5; 84]$ (так как второе неравенство системы строгое, точки пересечения графиков не являются решениями системы).

Заметим, что на отрезке $[5; 84]$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ лежат выше оси Ox. Поэтому искомое количество целочисленных точек мы получим, если из количества S_1 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $g(x)$ на отрезке $[5; 84]$, вычтем

количество S_2 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $f(x)$ на отрезке $[5; 84]$. При этом мы учтём, что второе неравенство системы строгое, а первое – нет.

Найдём S_1. Так как на отрезке $[5; 84]$ лежат $84 - 5 + 1 = 80$ целочисленных точек, то $S_1 = 80 \cdot 85 + (3^{81} - 1)(5 + 6 + \ldots + 84) = 80 \cdot 85 + (3^{81} - 1) \cdot 40 \cdot 89 = 3240 + 3^{81} \cdot 3560$.

Найдём S_2. Имеем: $S_2 = (3^5 + 4 \cdot 3^{81}) + (3^6 + 4 \cdot 3^{81}) + \ldots + (3^{84} + 4 \cdot 3^{81}) = 3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{84} + 4 \cdot 3^{81} \cdot 80 = 3^5 \cdot \frac{3^{80}-1}{2} + 320 \cdot 3^{81} = \frac{721 \cdot 3^{81} - 243}{2}$.

Искомое количество равно $S_1 - S_2 = 3240 + 3^{81} \cdot 3560 - \frac{721 \cdot 3^{81} - 243}{2} = \frac{6399 \cdot 3^{81} + 6723}{2} = \frac{79 \cdot 3^{85} + 6723}{2}$.

ВАРИАНТ 7

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9 261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ: 1 680.

Решение. Ввиду того, что $9\,261 = 3^3 \cdot 7^3$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три тройки, три семёрки и две единицы или (б) тройка, девятка, три семёрки и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения троек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем три места из пяти оставшихся для размещения семёрок ($C_5^3 = \frac{5!}{3!2!}$ способов). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{3!3!} = 1\,120$.

Окончательно получаем $560 + 1\,120 = 1\,680$ способов.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$-2\sin 2x \sin 7x + 2\sin 7x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x \Leftrightarrow 2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin 2x = 0, \\ \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\sin 7x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2x = 1, \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 7x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 7x + 2\pi k, \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - 7x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Окончательно получаем $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2)$, $(2; 4)$, $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. Логарифмируем первое уравнение системы по основанию e:

$$\ln\left(x^2y^4\right) \cdot (-\ln x) = \ln y \cdot \ln\left(y/x^7\right).$$

Это уравнение на области допустимых значений равносильно следующему:

$$(2\ln x + 4\ln y)\ln x = \ln y(7\ln x - \ln y) \Leftrightarrow \ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln y - \ln x)(\ln y - 2\ln x) = 0 \Leftrightarrow (y - x)\left(y - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x, \\ y = x^2. \end{array}\right.$$

Записываем второе уравнение в виде $y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$ и решаем его как квадратное относительно переменной y:

$$D=(x+4)^2-4\left(8x-2x^2\right)=x^2+8x+16-32x+8x^2=(3x-4)^2 \Rightarrow y=\frac{(x+4)\pm(3x-4)}{2}.$$

Значит, $y=2x$ или $y=4-x$. Далее возможны четыре случая:

а) $\begin{cases} y=x, \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\begin{cases} y=x, \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=x^2, \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases} \end{array}\right.$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

г) $\begin{cases} y=x^2, \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x, \\ x^2+x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x, \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \\ y=\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \\ y=\frac{9+\sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$

Точка $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$ не удовлетворяет ОДЗ.

Объединяя результаты, получаем итоговый ответ: $(2;2)$, $(2;4)$, $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

Ответ: $\angle KSO=\arcsin\frac{3}{5}$, $S=\frac{64}{25}$.

Решение. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Пусть радиус сферы равен r. Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK=OL=OM=R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO=\angle LSO=\angle MSO$ (пусть $\angle KSO=\alpha$, $SO=x$). Высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть β и γ касательные плоскости к сфере, проходящие через точки P и Q, а E и F – точки пересечения этих плоскостей с прямой SK. По условию площади сечений трёхгранного угла этими плоскостями равны соответственно $S_1=1$ и $S_2=16$. Рассмотрим сечение трехгранного угла и сферы плоскостью SKO (см. рис. и обозначения на нем). Так как $SH\perp HK$ и $SH\perp HL$, то $\tau\perp SH$. Тогда сечения трёхгранного угла плоскостями τ, β и γ – подобные треугольники, плоскости которых параллельны (все они перпендикулярны SO).

Если Σ – площадь треугольника, получающегося в сечении трёхгранного угла плоскостью KLM, то из подобия $\Sigma : S_1 : S_2 = KH^2 : EP^2 : FQ^2$. Следовательно, $EP:FQ=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$. Тогда $\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}=SP:SQ=(x-r):(x+r)$, откуда $r=x\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}$, а $\sin\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}=\frac{3}{5}$. Отсюда $\angle KSO=\arcsin\frac{3}{5}$.

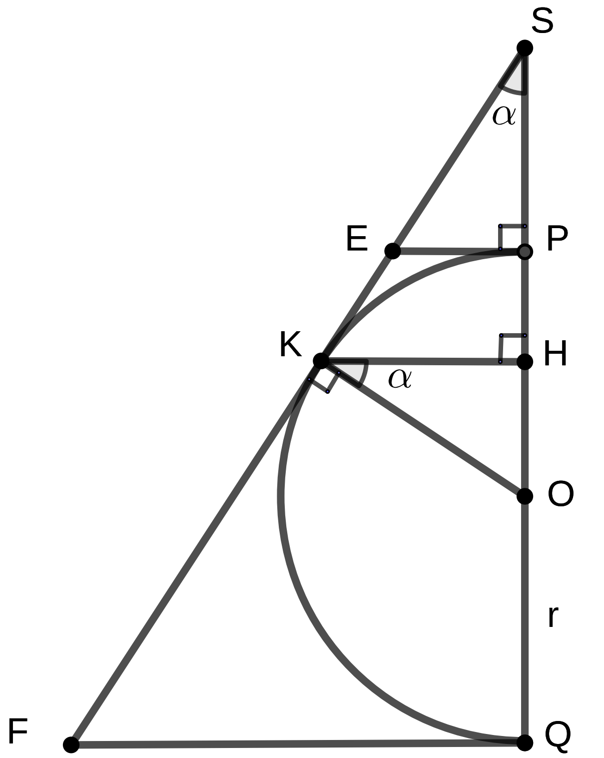

Рис. 7: вариант 7, задача 4

Далее, $OH = r\sin\alpha$, $SH = SO - OH = \frac{r}{\sin\alpha} - r\sin\alpha$, $SP = SO - r = \frac{r}{\sin\alpha} - r$. Значит, $\Sigma : S_1 = KH^2 : EP^2 = SH^2 : SP^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)^2 : \left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1+\sin\alpha)^2 = \frac{64}{25}$, откуда $\Sigma = \frac{64}{25}$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{49; 169\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x+y+5=0$ и $y-x+5=0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную сверху от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0;10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $x+y+5$ и $y-x+5$ положительны. Таким образом, уравнение принимает вид $(x+y+5)+(y-x+5)=10$, откуда $y=0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(5;0)$ и $D(-5;0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(5;0)$, $B(5;-10)$, $C(-5;-10)$ и $D(-5;0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y>0$, поэтому можно считать, что $y \leqslant 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x|-12)^2+(y+5)^2=a$ (раскрыв модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a<0$, у уравнения нет решений. При $a=0$ оно задаёт две точки $(12;-5)$ и $(-12;-5)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K, система не имеет решений, и значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a>0$.

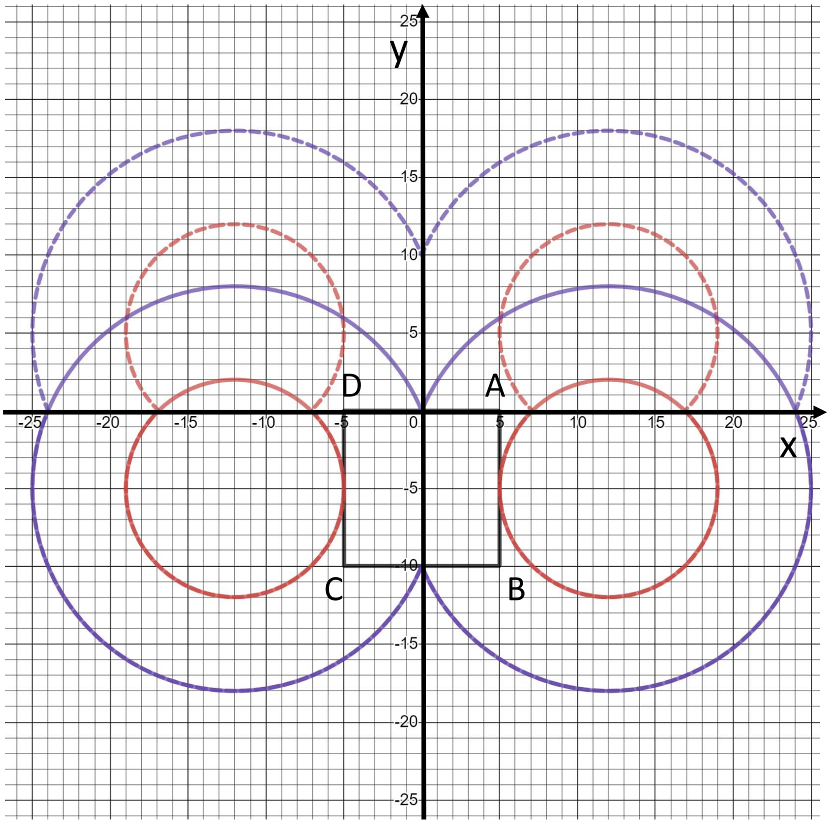

Рис. 8: вариант 7, задача 5

При $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид $(x-12)^2+(y+5)^2=a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(12;-5)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geqslant 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy. Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy.

Если $0<a<49$, график $(|x|-12)^2+(y+5)^2=a$ не пересекает квадрат K, и система уравнений не имеет решений. Если $a=49$, система уравнения имеет два решения – точки $X(5;-5)$ и $Y(-5;-5)$. Если $a \in (49,74]$, дуга окружности $(x-12)^2+(y+5)^2=a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезок AB дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (74,169)$, дуга окружности $(x-12)^2+(y+5)^2=a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a=169$, система уравнений имеет два решения – точки $(0;0)$ и $(0;-10)$. Наконец, если $a>169$, дуга окружности $(x-12)^2+(y+5)^2=a$, $x \geqslant 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a=49$ и $a=169$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

Ответ: а) $CF = 20$; б) $S_{ACF} = 196$.

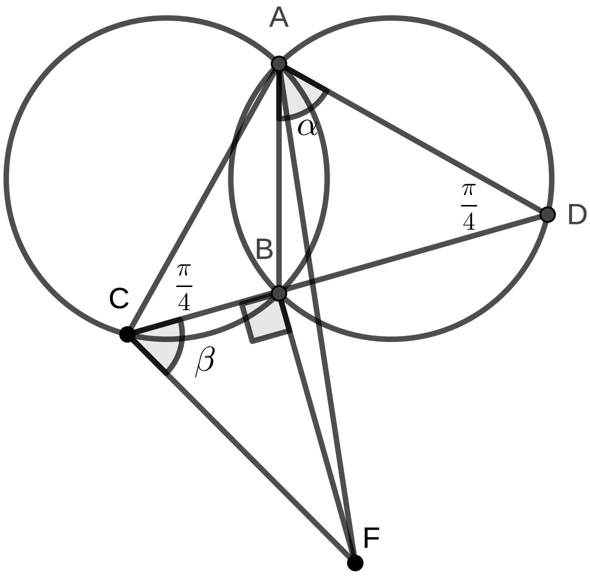

Рис. 9: вариант 7, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 10$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 20$.

б) Так как $\operatorname{tg}\beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\beta = \alpha$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB, поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CF \cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = 2R^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = R^2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right) = R^2(1 + \sin 2\alpha) = R^2\left(1 + 2\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\right)$, где $\cos\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{3}{5}$. Значит, $S_{ACF} = 196$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Ответ. $29 \cdot 2^{37} + 1120$.

Решение. Пусть $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$, $g(x) = 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вниз, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Координаты обеих точек легко подобрать. Действительно, $f(6) = 2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 64 + 12 \cdot 2^{32} = 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)6 = g(6)$ и $f(38) = 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} = 64 \cdot 2^{32} + 12 \cdot 2^{32} = 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)38 = g(38)$. На промежутке $6 < x < 38$ график $f(x)$ лежит ниже графика $g(x)$. Поэтому система имеет целочисленные решения только при целых $x \in [7; 37]$ (так как второе неравенство системы строгое, точки пересечения графиков не являются решениями системы).

Заметим, что на отрезке $[7; 37]$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ лежат выше оси Ox. Поэтому искомое количество целочисленных точек мы получим, если из количества S_1 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $g(x)$ на отрезке $[7; 37]$, вычтем

количество S_2 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $f(x)$ на отрезке $[7;37]$. При этом мы учтём, что второе неравенство системы строгое, а первое – нет.

Найдём S_1. Так как на отрезке $[7;37]$ лежат $37-7+1=31$ целочисленная точка, то $S_1 = 31\cdot 76 + 2\left(2^{34}-1\right)(7+8+\ldots+37) = 31\cdot 76 + 2\left(2^{32}-1\right)\cdot 22\cdot 31 = 992 + 2^{34}\cdot 341$.

Найдём S_2. Имеем: $S_2 = \left(2^7 + 3\cdot 2^{34}\right) + \left(2^8 + 3\cdot 2^{34}\right) + \ldots + \left(2^{37} + 3\cdot 2^{34}\right) = 2^7 + 2^8 + \ldots + 2^{37} + 3\cdot 2^{34}\cdot 31 = 2^{38} - 2^7 + 2^{34}\cdot 93 = 2^{34}\cdot 109 - 128$.

Искомое количество равно $S_1 - S_2 = 992 + 2^{34}\cdot 341 - \left(2^{34}\cdot 109 - 128\right) = 232\cdot 2^{34} + 1120 = 29\cdot 2^{37} + 1120$.

ВАРИАНТ 8

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64 827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

   Ответ: 1 120.

   Решение. Ввиду того, что $64\,827 = 3^3 \cdot 7^4$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три тройки, четыре семёрки и одна единица или (б) тройка, девятка, четыре семёрки и две единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

   (а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения троек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем одно место из пяти оставшихся для размещения единицы ($C_5^1 = 5$ способов). Наконец, оставшиеся места занимают семёрки. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 5 = 280$ способов.

   (б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{4!2!} = 840$.

   Окончательно получаем $280 + 840 = 1\,120$ способов.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

   Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x\cos 5x = -\sqrt{2}\cos 4x \Leftrightarrow 2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2}\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0, \\ \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\cos 5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2x = -1, \\ \cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos 5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ 2x - \dfrac{3\pi}{4} = 5x + 2\pi k, \\ 2x - \dfrac{3\pi}{4} = -5x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

   Окончательно получаем $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

   Ответ: $(2; -2)$, $(3; -9)$, $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$.

   Решение. Логарифмируем первое уравнение системы по основанию e:

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) \cdot \ln(-y) = \ln x^2 \cdot \ln\left(xy^2\right).$$

   Это уравнение на области допустимых значений равносильно следующему:

$$(7\ln x - \ln(-y))\ln(-y) = 2\ln x(\ln x + 2\ln(-y)) \Leftrightarrow \ln^2(-y) - 3\ln x\ln(-y) + 2\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln(-y) - \ln x)(\ln(-y) - 2\ln x) = 0 \Leftrightarrow (-y - x)\left(-y - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -x, \\ y = -x^2. \end{array}\right.$$

   Записываем второе уравнение в виде $y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$ и решаем его как квадратное относительно переменной y:

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-\left(12x-3x^2\right)=x^2+4x+4-12x+3x^2=(2x-2)^2\Rightarrow y=-(x+2)\pm(2x-2).$$

Значит, $y=-3x$ или $y=x-4$. Далее возможны четыре случая:

а) $\begin{cases}y=-x,\\ y=-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\begin{cases}y=-x,\\ y=x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=-2.\end{cases}$

в) $\begin{cases}y=-x^2,\\ y=-3x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x=3,\\ y=-9.\end{cases}\end{array}\right.$ Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

г) $\begin{cases}y=-x^2,\\ y=x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-4,\\ x^2+x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-4,\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\\ y=\frac{-9+\sqrt{17}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\\ y=\frac{-9-\sqrt{17}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$

Точка $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{-9-\sqrt{17}}{2}\right)$ не удовлетворяет ОДЗ.

Объединяя результаты, получаем итоговый ответ: $(2;-2)$, $(3;-9)$, $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$.

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

Ответ: $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{7}$; $S=\frac{576}{49}$.

Решение. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Пусть радиус сферы равен r. Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK=OL=OM=R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO=\angle LSO=\angle MSO$ (пусть $\angle KSO=\alpha$, $SO=x$). Высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть β и γ касательные плоскости к сфере, проходящие через точки P и Q, а E и F – точки пересечения этих плоскостей с прямой SK. По условию площади сечений трёхгранного угла этими плоскостями равны соответственно $S_1=9$ и $S_2=16$. Рассмотрим сечение трехгранного угла и сферы плоскостью SKO (см. рис. и обозначения на нем). Так как $SH\perp HK$ и $SH\perp HL$, то $\tau\perp SH$. Тогда сечения трёхгранного угла плоскостями τ, β и γ – подобные треугольники, плоскости которых параллельны (все они перпендикулярны SO).

Если Σ – площадь треугольника, получающегося в сечении трёхгранного угла плоскостью KLM, то из подобия $\Sigma:S_1:S_2=KH^2:EP^2:FQ^2$. Следовательно, $EP:FQ=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$. Тогда $\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}=SP:SQ=(x-r):(x+r)$, откуда $r=x\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}$, а $\sin\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}}=\frac{1}{7}$. Отсюда $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{7}$.

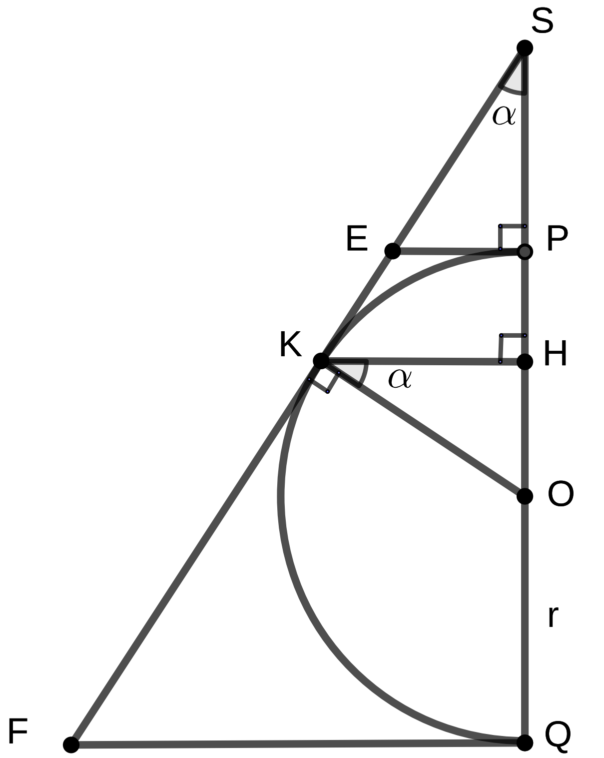

Рис. 10: вариант 8, задача 4

Далее, $OH = r\sin\alpha$, $SH = SO - OH = \frac{r}{\sin\alpha} - r\sin\alpha$, $SP = SO - r = \frac{r}{\sin\alpha} - r$. Значит, $\Sigma : S_1 = KH^2 : EP^2 = SH^2 : SP^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)^2 : \left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin\alpha)^2 = \frac{64}{49}$, откуда $\Sigma = \frac{576}{49}$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{49; 289\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x+y+8=0$ и $x-y+8=0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную справа от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(10;0)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $x+y+8$ и $x-y+8$ положительны. Таким образом, уравнение принимает вид $(x+y+8)+(x-y+8)=16$, откуда $x=0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(0;8)$ и $B(0;-8)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(0;8)$, $B(0;-8)$, $C(-16;-8)$ и $D(-16;8)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $x>0$, поэтому можно считать, что $x \leqslant 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(x+8)^2+(|y|-15)^2=a$ (раскрыв модуль у переменной x). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a<0$, у уравнения нет решений. При $a=0$ оно задаёт две точки $(-8;15)$ и $(-8;-15)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K, система не имеет решений, и значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a>0$.

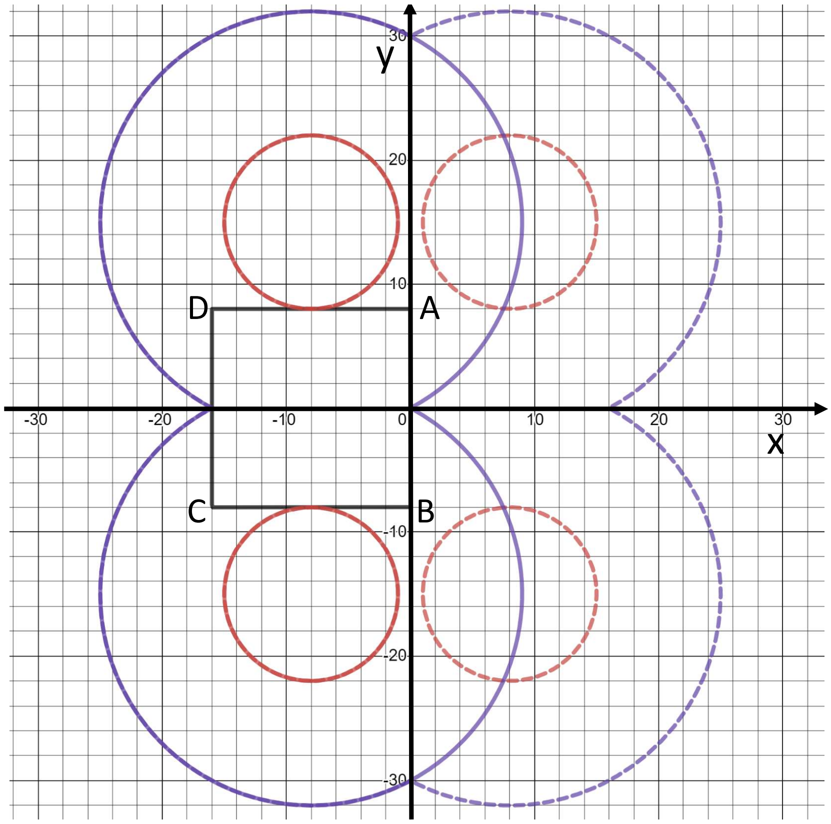

Рис. 11: вариант 8, задача 5

При $y \geqslant 0$ уравнение принимает вид $(x+8)^2+(y-15)^2=a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(-8;15)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $y \geqslant 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены y на $(-y)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Ox. Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Ox.

Если $0<a<49$, график $(x+8)^2+(|y|-15)^2=a$ не пересекает квадрат K, и система уравнений не имеет решений. Если $a=49$, система уравнения имеет два решения – точки $X(-8;8)$ и $Y(-8;-8)$. Если $a \in (49,113]$, дуга окружности $(x+8)^2+(|y|-15)^2=a$, $y \geqslant 0$ пересекает отрезок AD дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Ox, образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (113,289)$, дуга окружности $(x+8)^2+(|y|-15)^2=a$, $y \geqslant 0$ пересекает отрезки BA и CD в двух точках с положительной ординатой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Ox, образуют 4 различных решения системы. Если $a=289$, система уравнений имеет два решения – точки $(0;0)$ и $(-16;0)$. Наконец, если $a>289$, дуга окружности $(x+8)^2+(|y|-15)^2=a$, $y \geqslant 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a=49$ и $a=289$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

Ответ: $CF = 34$, $S_{ACF} = 529$.

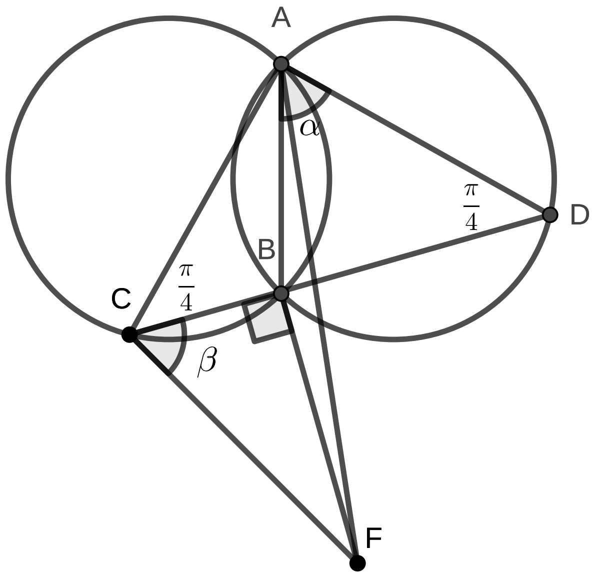

Рис. 12: вариант 8, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 17$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 34$.

б) Так как $\operatorname{tg}\beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\beta = \alpha$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB, поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CF \cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = 2R^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = R^2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right) = R^2(1 + \sin 2\alpha) = R^2\left(1 + 2\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\right)$, где $\cos\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{8}{17}$. Значит, $S_{ACF} = 529$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Ответ. $\frac{25 \cdot 3^{31} + 2349}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$, $g(x) = 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вниз, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Координаты обеих точек легко подобрать. Действительно, $f(4) = 3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)4 = g(4)$ и $f(31) = 3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 27 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)31 = g(31)$. На промежутке $4 < x < 31$ график $f(x)$ лежит ниже графика $g(x)$. Поэтому система имеет целочисленные решения только при целых $x \in [5; 30]$ (так как первое неравенство системы строгое, точки пересечения графиков не являются решениями системы).

Заметим, что на отрезке $[5; 30]$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ лежат выше оси Ox. Поэтому искомое количество целочисленных точек мы получим, если из количества S_1 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $g(x)$ на отрезке $[5; 30]$, вычтем

количество S_2 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $f(x)$ на отрезке $[5;30]$. При этом мы учтём, что первое неравенство системы строгое, а второе – нет.

Найдём S_1. Так как на отрезке $[5;30]$ лежат $30-5+1=26$ целочисленных точек, то $S_1 = 93\cdot 26 + 3\cdot\left(3^{27}-1\right)(5+6+\ldots+30) = 93\cdot 26 + \left(3^{27}-1\right)\cdot 3\cdot 35\cdot 13 = 1053 + 3^{28}\cdot 455$.

Найдём S_2. Имеем: $S_2 = \left(3^5+4\cdot 3^{28}\right)+\left(3^6+4\cdot 3^{28}\right)+\ldots+\left(3^{30}+4\cdot 3^{28}\right) = 3^5+3^6+\ldots+3^{30}+4\cdot 3^{28}\cdot 26 = 3^5\cdot\frac{3^{26}-1}{2}+104\cdot 3^{28} = \frac{235\cdot 3^{28}-243}{2}$.

Искомое количество равно $S_1-S_2 = 1053+3^{28}\cdot 455-\frac{235\cdot 3^{28}-243}{2} = \frac{675\cdot 3^{28}+2349}{2} = \frac{25\cdot 3^{31}+2349}{2}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

---

1. **(3 балла)** За рассмотрение каждого из двух случаев – по 1 баллу (при этом балл ставится, даже если результат в случае не сведён к числу).

---

2. **(5 баллов)** Уравнение сведено к совокупности двух тригонометрических уравнений (одно из них элементарное тригонометрическое, а второе имеет вид $\cos f(x) = \cos g(x)$ (или $\cos f(x) = \sin g(x)$ или $\sin f(x) = \sin g(x)$) – 2 балла;

   решено элементарное тригонометрическое уравнение – 1 балл;

   решено второе уравнение совокупности – 2 балла.

---

3. **(5 баллов)** Первое уравнение разложено на множители – 2 балла;

   второе уравнение разложено на множители – 1 балл;

   не учтено ОДЗ – снять 1 балл.

---

4. **(5 баллов)** Доказано, что плоскость KLM параллельна касательной плоскости – 1 балл;

   найден угол KSO – 2 балла;

   найдена площадь – 2 балла.

---

5. **(5 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы .... 1 балл;

   за каждое найденное значение параметра – по 2 балла;

   в ответ включены лишние значения параметра – не более 3 баллов за задачу.

---

6. **(6 баллов)** Решён пункт а) – 2 балла;

   решён пункт б) – 4 балла;

   доказано, что треугольник ACD равнобедренный прямоугольный (или найден один из его острых углов) – 1 балл (этот балл может суммироваться с 2 баллами за пункт а));

   при решении считается, что точка B – середина CD (или аналогичное утверждение) – 0 баллов за дальнейшие рассуждения и не более 1 балла за задачу.

---

7. **(6 баллов)** Найдены координаты точек пересечения графиков – 2 балла (по одному баллу за каждую точку);

   выпуклость вниз графика показательной функции и количество точек пересечения графиков обосновывать не обязательно;

   количество точек посчитано, но результат не представлен в требуемом виде – 2 балла;

   при подсчёте неверно учтены граничные точки – снять 1 балл.

ВАРИАНТ 13

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p-q$.

   Ответ: $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}$.

   Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 90 орлов равна вероятности получить 90 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 89 орлов равна вероятности получить 89 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p = p_{55} + p_{56} + \ldots + p_{90}$, $q = p_0 + p_1 + \ldots + p_{34}$, а в силу сказанного выше, $q = p_{90} + p_{89} + \ldots + p_{56}$. Значит, $p - q = p_{55}$.

   Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 55 раз при 90 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 90 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{90}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 35 единиц. Их количество равно C_{90}^{35} (выбираем из имеющихся 90 позиций 35 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}$. Это и есть p_{55}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x+\sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.

   Ответ: $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \neq 11p+4$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

   Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 8x \cos 3x - \cos 8x \sin 3x + \cos 3x \sin 8x + \sin 3x \sin 8x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}.$$

   Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2}\cos 6x, \\ \cos 6x \neq 0. \end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k, \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

   Теперь учтём условие $\cos 6x \neq 0$.

   Если $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, то $\cos 6x = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + 12\pi k\right) = 0$, т.е. условие $\cos 6x \neq 0$ нарушается.

   Если $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, то $\cos 6x = \cos\left(\frac{3\pi}{22} + \frac{12\pi k}{11}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{3\pi}{22} + \frac{12\pi k}{11} = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Получаем $12k = 4 + 11n$, $k = n - \frac{n-4}{12}$. Поскольку $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p = \frac{n-4}{12} \in \mathbb{Z}$. Значит, $n = 12p+4$, $k = 11p+4$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \neq 11p+4$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{\sqrt{4\log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leqslant 48$.

   Ответ: $x \in (1;3] \cup \left\{4^{\log_3 4}\right\}$.

   Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 3}} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\sqrt{\log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3^2 x \cdot \log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $3^{3\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 40 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 48$. (Отметим, что при этом

изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Тогда получаем $t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(t-3)(t-4)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $t \in (-\infty; 3] \cup \{4\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 3, \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_3 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_3 x \leqslant 1, \\ \log_3 x = \log_3^2 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 4^{\log_3 4}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 3] \cup \left\{4^{\log_3 4}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM.

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) $S_{KLM} = 9{,}8$; б) $V_{SABC} = \frac{1372}{3}$.

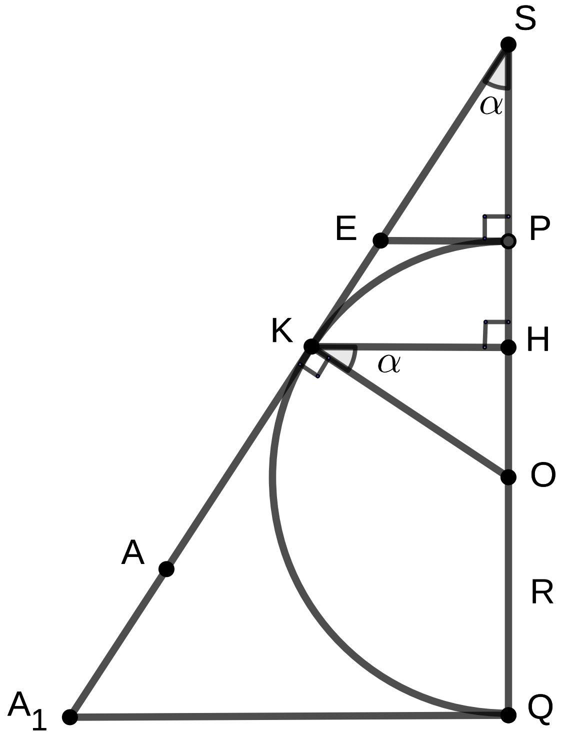

Рис. 1: вариант 13, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{2}{5}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 5$, а плоскостью τ – S_{KLM}. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1+\sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1+\sin\alpha)^2 = 9{,}8$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SQ\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot(SO+R)\cdot S_0\cdot\left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot(SO+SO\sin\alpha)\cdot S_0\cdot(SO+SO\sin\alpha)^2 : (SO-SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_0\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1372}{3}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = |x-\sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

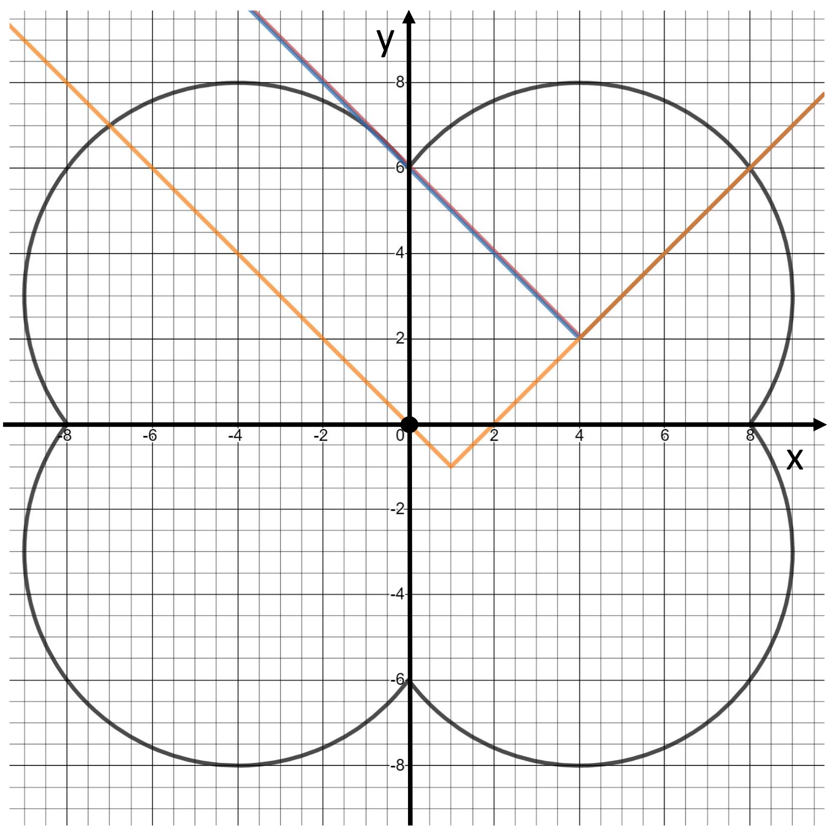

Рис. 2: вариант 13, задача 5

Ответ. $a \in \left\{1; 16; \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2\right\}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули,

мы получаем $(x-4)^2+(y-3)^2=25$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(4;3)$ радиуса 5. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0;0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a}, \sqrt{a}-2)$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y=x-2$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $x<0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $(8;6)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a \in (0;1)\cup(1;16)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую во второй четверти (назовём её ω). Если $a=1$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a=16$, луч ℓ_1 проходит через точку $(0;6)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a \in \left(16, \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую в первой четверти. При $a=\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности в первой четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a>\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую в первой четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a \in \left\{1; 16; \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2\right\}$.

Значение $a=\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(-4;3)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен (-1), то угловой коэффициент радиуса QP равен 1, откуда следует, что координаты точки P – это $\left(-4+5\cos\frac{\pi}{4}; 3+5\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $y=-(x-\sqrt{a})+\sqrt{a}-2$ проходит через точку P, получаем $3+\frac{5}{\sqrt{2}}=2\sqrt{a}+2-\frac{5}{\sqrt{2}}$, откуда $a=\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=2$.

   Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{3}{2}$; б) $R_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $R_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

   Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2=\alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P=\frac{\pi}{2}-\angle O_2BE=\alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2}=2S_{O_1BO_2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha=R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE=\frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha=R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}}=\frac{R_1}{R_2\cos\alpha}=2$, то есть $\frac{1}{2}R_1=R_2\cos\alpha$. Далее, $AB=DP$, откуда $2R_1=R_2+R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1=R_2+\frac{1}{2}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1}=\frac{3}{2}$.

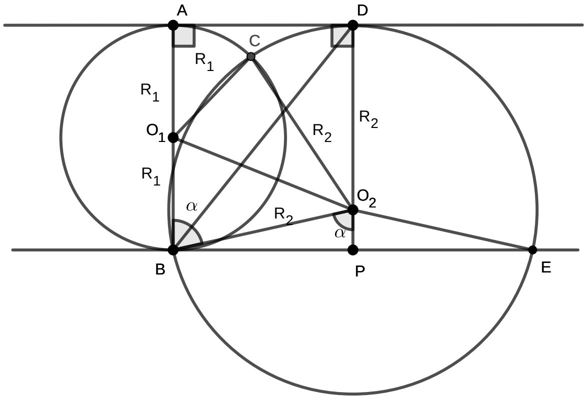

Рис. 3: вариант 13, задача 6

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2 \sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2 \cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}$ и $4R_1R_2 = 2^2 = 4$. Отсюда $R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $R_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 90 + x - 6^{90}, \\ y \leqslant \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 6^{180} - \frac{7}{10} \cdot 6^{90} + \frac{456}{5}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_6 x$, $g(x) = 90 + x - 6^{90}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f(6^{90}) = \log_6 6^{90} = 90 = 90 + 6^{90} - 6^{90} = g(6^{90})$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 90)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 6^{90} = \frac{(1+6^{90})6^{90}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_6 6^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $6^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (6-1) + (6^2-1) + \ldots + (6^{90}-1) = 6 \cdot \frac{6^{90}-1}{5} - 90 = \frac{6^{91}-456}{5}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{(1+6^{90})6^{90}}{2} - \frac{6^{91}-456}{5} = \frac{1}{2} \cdot 6^{180} - \frac{7}{10} \cdot 6^{90} + \frac{456}{5}$.

ВАРИАНТ 14

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p-q$.

Ответ: $-\frac{1}{2^{70}} \cdot C_{70}^{28}$.

Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 70 орлов равна вероятности получить 70 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 69 орлов равна вероятности получить 69 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p=p_{43}+p_{44}+\ldots+p_{70}$, $q=p_0+p_1+\ldots+p_{28}$, а в силу сказанного выше, $q=p_{70}+p_{69}+\ldots+p_{42}$. Значит, $p-q=-p_{42}=-p_{28}$.

Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 28 раз при 70 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 70 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{70}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 28 единиц. Их количество равно C_{70}^{28} (выбираем из имеющихся 70 позиций 28 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{70}} \cdot C_{70}^{28}$. Это и есть p_{28}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x-\sin 3x}+\frac{\sin 4x}{\cos 3x+\sin 3x}=\sqrt{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{52}+\frac{2\pi k}{13}$, $k \neq 13p-5$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 4x \cos 3x+\cos 4x \sin 3x+\cos 3x \sin 4x-\sin 3x \sin 4x}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\cos 7x+\sin 7x}{\cos 6x}=\sqrt{2}.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases}\cos 7x+\sin 7x=\sqrt{2}\cos 6x, \\ \cos 6x \neq 0.\end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-\frac{\pi}{4}=6x+2\pi k, \\ 7x-\frac{\pi}{4}=-6x+2\pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=\frac{\pi}{52}+\frac{2\pi k}{13}, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Теперь учтём условие $\cos 6x \neq 0$.

Если $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, то $\cos 6x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+12\pi k\right)=0$, т.е. условие $\cos 6x \neq 0$ нарушается.

Если $x=\frac{\pi}{52}+\frac{2\pi k}{13}$, то $\cos 6x=\cos\left(\frac{3\pi}{26}+\frac{12\pi k}{13}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{3\pi}{26}+\frac{12\pi k}{13}=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Получаем $12k=5+13n$, $k=n+\frac{n+5}{12}$. Поскольку $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p=\frac{n+5}{12} \in \mathbb{Z}$. Значит, $n=12p-5$, $k=13p-5$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x=\frac{\pi}{52}+\frac{2\pi k}{13}$, $k \neq 13p-5$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}}-7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}}+60 \cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \leqslant 72$.

Ответ: $x \in (1;2] \cup \left\{6^{\log_2 6}\right\}$.

Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 2}}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\sqrt{\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2^2 x \cdot \log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $2^{3\sqrt{\log_2 x}}-14 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}}+60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leqslant 72$. (Отметим, что при этом

изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$. Тогда получаем $t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(t-2)(t-6)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $t \in (-\infty; 2] \cup \{6\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leqslant 2, \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1, \\ \log_2 x = \log_2^2 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x = 6^{\log_2 6}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 2] \cup \left\{6^{\log_2 6}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) $S_{KLM} = \frac{49}{8}$; б) $V_{SABC} = \frac{1029}{2}$.

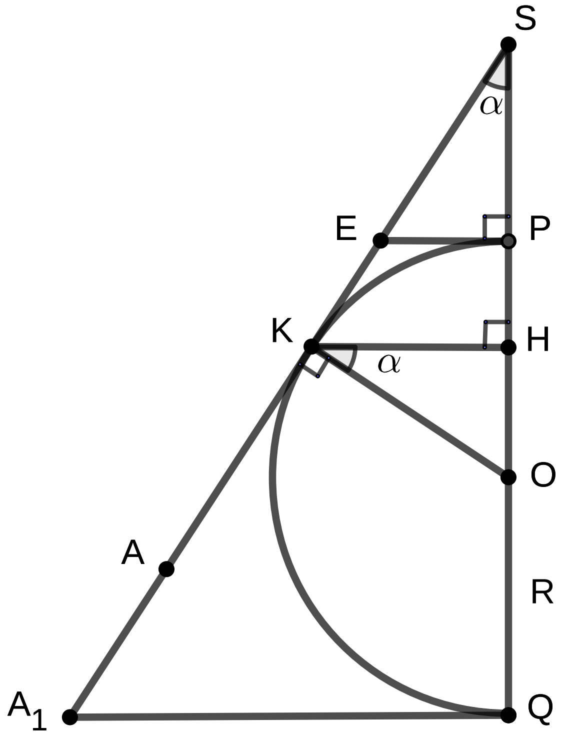

Рис. 4: вариант 14, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{3}{4}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 2$, а плоскостью $\tau - S_{KLM}$. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1 + \sin\alpha)^2 = \frac{49}{8}$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SQ \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot (SO + R) \cdot S_0 \cdot \left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot (SO + SO\sin\alpha) \cdot S_0 \cdot (SO + SO\sin\alpha)^2 : (SO - SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_0 \cdot \frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1029}{2}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

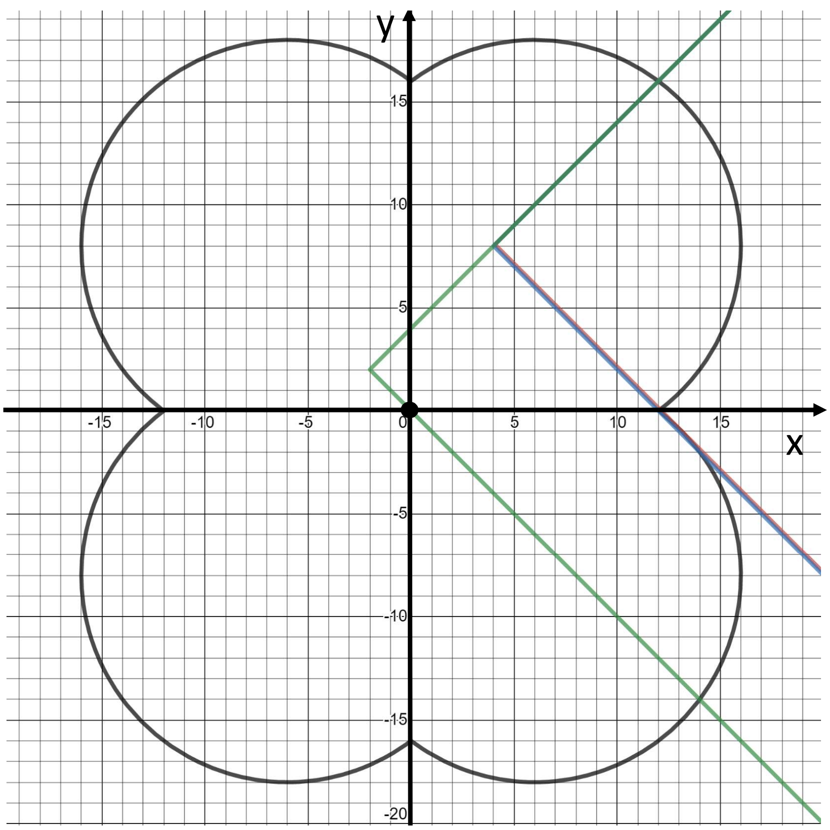

Рис. 5: вариант 14, задача 5

Ответ. $a \in \left\{4; 64; 51 + 10\sqrt{2}\right\}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули,

мы получаем $(x-6)^2+(y-8)^2=100$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(6;8)$ радиуса 10. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0;0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a}-4, \sqrt{a})$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y=x+4$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $x<0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $(12;16)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a\in(0;4)\cup(4;64)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую в четвёртой четверти (назовём её ω). Если $a=4$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a=64$, луч ℓ_1 проходит через точку $(12;0)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a\in\left(64, \left(5\sqrt{2}+1\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую в первой четверти. При $a=\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности в первой четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a>\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую в первой четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a\in\left\{4;64;\left(5\sqrt{2}+1\right)^2\right\}$.

Значение $a=\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(6;-8)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен (-1), то угловой коэффициент радиуса QP равен 1, откуда следует, что координаты точки P – это $\left(6+10\cos\frac{\pi}{4}; -8+10\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $x=-\left(y-\sqrt{a}\right)+\sqrt{a}-4$ проходит через точку P, получаем $6+5\sqrt{2}=2\sqrt{a}+4-5\sqrt{2}$, откуда $a=\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=3$.

Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{5}{3}$; б) $R_1=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, $R_2=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2=\alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P=\frac{\pi}{2}-\angle O_2BE=\alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2}=2S_{O_1BO_2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha=R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE=\frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha=R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}}=\frac{R_1}{R_2\cos\alpha}=3$, то есть $\frac{1}{3}R_1=R_2\cos\alpha$. Далее, $AB=DP$, откуда $2R_1=R_2+R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1=R_2+\frac{1}{3}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1}=\frac{5}{3}$.

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2=AB^2+AD^2$, то есть $BD^2=4R_1^2+BP^2=4R_1^2+\left(R_2\sin\alpha\right)^2=4R_1^2+R_2^2-\left(R_2\cos\alpha\right)^2=4R_1^2+R_2^2-\left(2R_1-R_2\right)^2=4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1}=\frac{5}{3}$

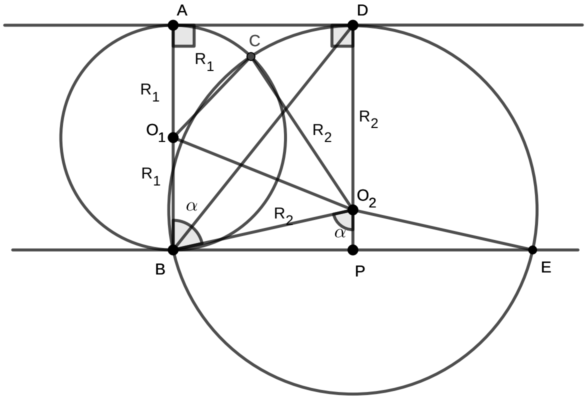

Рис. 6: вариант 14, задача 6

и $4R_1R_2 = 3^2 = 9$. Отсюда $R_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, $R_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 80 + x - 7^{80}, \\ y \leqslant \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 7^{160} - \frac{2}{3} \cdot 7^{80} + \frac{487}{6}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_7 x$, $g(x) = 80 + x - 7^{80}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f\left(7^{80}\right) = \log_7 7^{80} = 80 = 80 + 7^{80} - 7^{80} = g\left(7^{80}\right)$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 80)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 7^{80} = \frac{\left(1+7^{80}\right)7^{80}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_7 7^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $7^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (7-1)+(7^2-1)+\ldots+(7^{80}-1) = 7 \cdot \frac{7^{80}-1}{6} - 80 = \frac{7^{81}-487}{6}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{\left(1+7^{80}\right)7^{80}}{2} - \frac{7^{81}-487}{6} = \frac{1}{2} \cdot 7^{160} - \frac{2}{3} \cdot 7^{80} + \frac{487}{6}$.

ВАРИАНТ 15

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p-q$.

Ответ: $\frac{1}{2^{110}} \cdot C_{100}^{61}$.

Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 110 орлов равна вероятности получить 110 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 109 орлов равна вероятности получить 109 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p = p_{61} + p_{62} + \ldots + p_{110}$, $q = p_0 + p_1 + \ldots + p_{48}$, а в силу сказанного выше, $q = p_{100} + p_{109} + \ldots + p_{62}$. Значит, $p - q = p_{61}$.

Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 61 раз при 110 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 110 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{110}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 61 единица. Их количество равно C_{110}^{61} (выбираем из имеющихся 110 позиций 61 позицию для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{110}} \cdot C_{100}^{61}$. Это и есть p_{61}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19},\ k \neq 19p + 2,\ k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{Z}$.

Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \cos 5x \sin 14x + \sin 5x \sin 14x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \cos 9x - \sin 9x = -\sqrt{2}\cos 10x, \\ \cos 10x \neq 0. \end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 10x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k + \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{19x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{3\pi}{76} + \dfrac{2\pi k}{19}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Теперь учтём условие $\cos 10x \neq 0$.

Если $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, то $\cos 10x = \cos\left(\frac{25\pi}{2} + 20\pi k\right) = 0$, т.е. условие $\cos 10x \neq 0$ нарушается.

Если $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19}$, то $\cos 10x = \cos\left(\frac{15\pi}{38} + \frac{20\pi k}{19}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{15\pi}{38} + \frac{20\pi k}{19} = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Получаем $20k = 2 + 19n$, $k = n + \frac{2-n}{20}$. Поскольку $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p = \frac{2-n}{20} \in \mathbb{Z}$. Значит, $n = 20p + 2$, $k = 19p + 2$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19}$, $k \neq 19p + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{\sqrt{4\log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leqslant 75$.

Ответ: $x \in (1; 3] \cup \left\{5^{\log_3 5}\right\}$.

Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 3}} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\sqrt{\log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3^2 x \cdot \log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $3^{3\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 55 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 75$. (Отметим, что при этом

изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Тогда получаем $t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(t-3)(t-5)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $t \in (-\infty; 3] \cup \{5\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 3, \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_3 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_3 x \leqslant 1, \\ \log_3 x = \log_3^2 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 5^{\log_3 5}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 3] \cup \left\{5^{\log_3 5}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM.

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) $S_{KLM} = 12{,}25$; б) $V_{SABC} = \frac{343}{2}$.

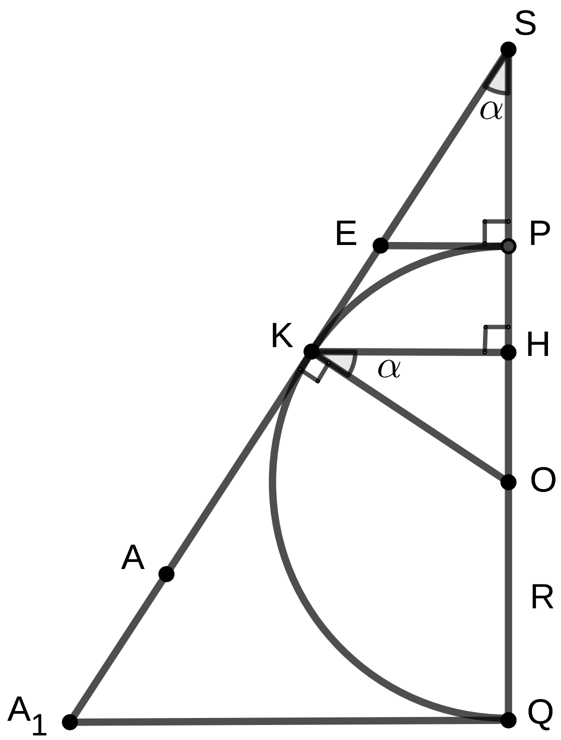

Рис. 7: вариант 15, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{1}{6}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 9$, а плоскостью τ – S_{KLM}. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1+\sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1+\sin\alpha)^2 = 12{,}25$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SQ\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot(SO+R)\cdot S_0\cdot\left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot(SO + SO\sin\alpha)\cdot S_0\cdot(SO+SO\sin\alpha)^2 : (SO - SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_0\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{343}{2}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = -|x-\sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a \in \left\{1; 36; \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2\right\}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули, мы получаем $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(12;5)$ радиуса 13. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0;0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a}, 2-\sqrt{a})$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $-\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y = 2 - x$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $x < 0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $\left(\frac{19+\sqrt{313}}{2}; -\frac{15+\sqrt{313}}{2}\right)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a \in (0;1)\cup(1;36)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую в третьей четверти (назовём её ω). Если $a = 1$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a = 36$, луч ℓ_1 проходит через точку $(0;-10)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a \in \left(36, \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую во второй четверти. При $a = \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности во второй четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a > \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую во второй четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a \in \left\{1; 36; \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2\right\}$.

Значение $a = \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(-12;-5)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен 1, то угловой коэффициент радиуса QP равен (-1), откуда следует, что координаты точки P – это $\left(-12+13\cos\frac{\pi}{4}; -5-13\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $y = (x-\sqrt{a})+2-\sqrt{a}$ проходит через точку P, получаем $-5-\frac{13}{\sqrt{2}} = -12-2\sqrt{a}+\frac{13}{\sqrt{2}}+2$, откуда $a = \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$.

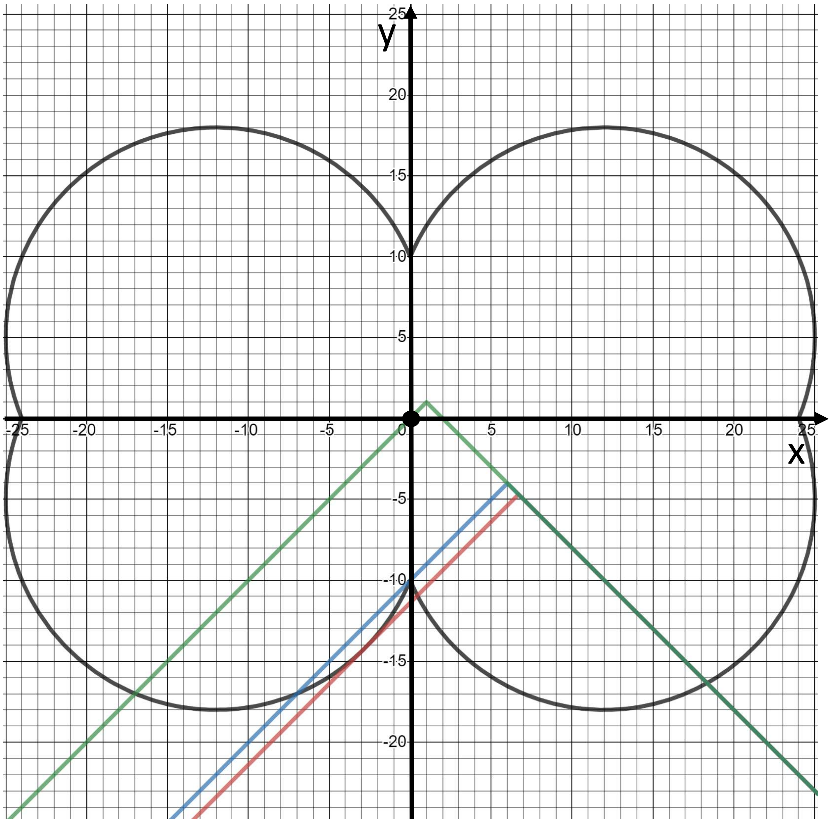

Рис. 8: вариант 15, задача 5

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.

Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4}$; б) $R_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $R_2 = \sqrt{7}$.

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1BO_2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha = R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE = \frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha = R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2\cos\alpha} = 4$, то есть $\frac{1}{4}R_1 = R_2\cos\alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{1}{4}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4}$.

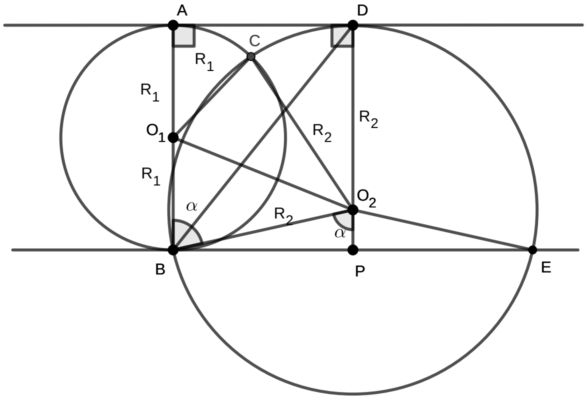

Рис. 9: вариант 15, задача 6

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2 \sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2 \cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4}$ и $4R_1R_2 = 4^2 = 16$. Отсюда $R_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $R_2 = \sqrt{7}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 110 + x - 5^{110}, \\ y \leqslant \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 5^{220} - \frac{3}{4} \cdot 5^{110} + \frac{445}{4}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_5 x$, $g(x) = 110 + x - 5^{110}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f(5^{110}) = \log_5 5^{110} = 110 = 110 + 5^{110} - 5^{110} = g(5^{110})$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 110)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 5^{110} = \frac{(1+5^{110})5^{110}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_5 5^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $5^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (5-1) + (5^2-1) + \ldots + (5^{110} - 1) = 5 \cdot \frac{5^{110}-1}{4} - 110 = \frac{5^{111}-445}{4}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{(1+5^{110})5^{110}}{2} - \frac{5^{111}-445}{4} = \frac{1}{2} \cdot 5^{220} - \frac{3}{4} \cdot 5^{110} + \frac{445}{4}$.

ВАРИАНТ 16

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p-q$

Ответ: $-\frac{1}{2^{80}}\cdot C_{80}^{29}$.

Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 80 орлов равна вероятности получить 80 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 79 орлов равна вероятности получить 79 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p=p_{52}+p_{53}+\ldots+p_{80}$, $q=p_0+p_1+\ldots+p_{29}$, а в силу сказанного выше, $q=p_{80}+p_{79}+\ldots+p_{51}$. Значит, $p-q=-p_{51}=-p_{29}$.

Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 29 раз при 80 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 80 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{80}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 29 единиц. Их количество равно C_{80}^{29} (выбираем из имеющихся 80 позиций 29 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{80}}\cdot C_{80}^{29}$. Это и есть p_{29}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x-\sin 5x}+\frac{\sin 4x}{\cos 5x+\sin 5x}=-\sqrt{2}$.

Ответ: $x=\frac{5\pi}{76}+\frac{2\pi k}{19}$, $k\neq 19p-3$, $k\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{Z}$.

Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 4x\cos 5x+\cos 4x\sin 5x+\cos 5x\sin 4x-\sin 5x\sin 4x}{\cos^2 5x-\sin^2 5x}=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\cos 9x+\sin 9x}{\cos 10x}=-\sqrt{2}.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases}\cos 9x+\sin 9x=-\sqrt{2}\cos 10x,\\ \cos 10x\neq 0.\end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 10x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k+\frac{\pi}{2},\\ \frac{19x-\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\frac{5\pi}{76}+\frac{2\pi k}{19},k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Теперь учтём условие $\cos 10x\neq 0$.

Если $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, то $\cos 10x=\cos\left(\frac{15\pi}{2}+20\pi k\right)=0$, т.е. условие $\cos 10x\neq 0$ нарушается.

Если $x=\frac{5\pi}{76}+\frac{2\pi k}{19}$, то $\cos 10x=\cos\left(\frac{25\pi}{38}+\frac{20\pi k}{19}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{25\pi}{38}+\frac{20\pi k}{19}=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Получаем $20k=-3+19n$, $k=n-\frac{n+3}{20}$. Поскольку $k\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p=\frac{n+3}{20}\in\mathbb{Z}$. Значит, $n=20p-3$, $k=19p-3$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x=\frac{5\pi}{76}+\frac{2\pi k}{19}$, $k\neq 19p-3$, $k\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}}-2^{\sqrt{4\log_2 x+3}}+21\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}}\leqslant 18$.

Ответ: $x\in(1;2]\cup\left\{3^{\log_2 3}\right\}$.

Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 2}}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\sqrt{\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2^2 x\cdot\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $2^{3\sqrt{\log_2 x}}-8\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}}+21\cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}}\leqslant 18$. (Отметим, что при этом изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $w = 2\sqrt{\log_2 x}$. Тогда получаем $w^3 - 8w^2 + 21w - 18 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(w-2)(w-3)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $w \in (-\infty; 2] \cup \{3\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{\log_2 x} \leqslant 2, \\ 2\sqrt{\log_2 x} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1, \\ \log_2 x = \log_2^2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x = 3^{\log_2 3}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 2] \cup \left\{3^{\log_2 3}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) $S_{KLM} = 6{,}25$; б) $V_{SABC} = \frac{250}{3}$.

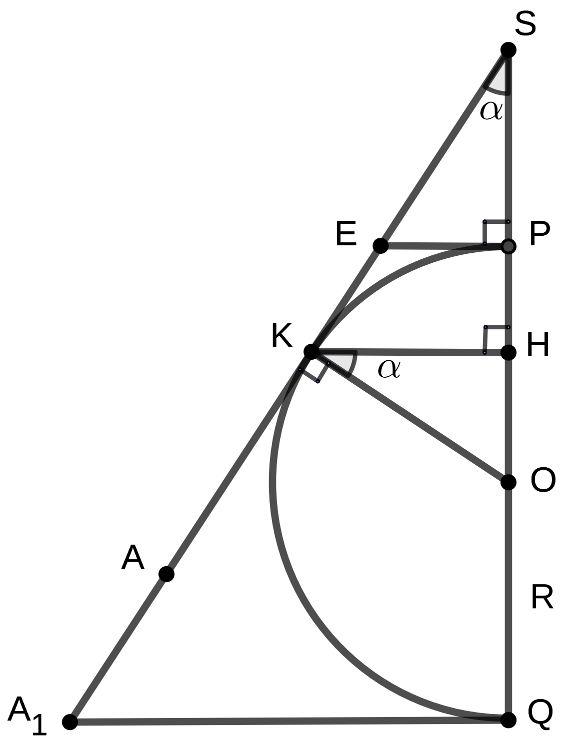

Рис. 10: вариант 16, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{1}{4}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 4$, а плоскостью $\tau - S_{KLM}$. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1+\sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1+\sin\alpha)^2 = 6{,}25$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SQ\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot(SO+R)\cdot S_0\cdot\left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot(SO+SO\sin\alpha)\cdot S_0\cdot(SO+SO\sin\alpha)^2 : (SO-SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_0\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{250}{3}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = -|y-\sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a \in \left\{9; 121; \left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\right\}$.

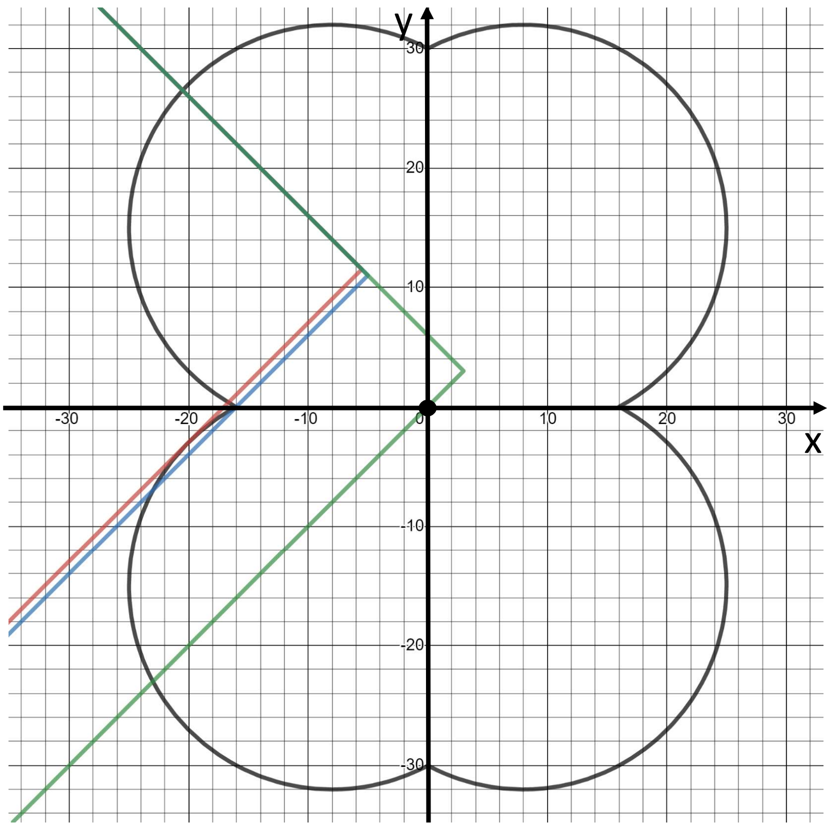

Рис. 11: вариант 16, задача 5

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули,

мы получаем $(x-8)^2+(y-15)^2=289$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(8;15)$ радиуса 17. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0;0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a}, 2-\sqrt{a})$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y=6-x$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $y<0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $\left(-\frac{17+\sqrt{577}}{2}; \frac{29+\sqrt{577}}{2}\right)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a \in (0;9)\cup(9;121)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую в третьей четверти (назовём её ω). Если $a=9$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a=121$, луч ℓ_1 проходит через точку $(-16;0)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a \in \left(121, \left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую во второй четверти. При $a=\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности во второй четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a>\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую во второй четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a \in \left\{9; 121; \left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\right\}$.

Значение $a=\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(-8;-15)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен 1, то угловой коэффициент радиуса QP равен (-1), откуда следует, что координаты точки P – это $\left(-8-17\cos\frac{\pi}{4}; -15+17\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $x=(y-\sqrt{a})+6-\sqrt{a}$ проходит через точку P, получаем $-8-\frac{17}{\sqrt{2}}=-15-2\sqrt{a}+\frac{17}{\sqrt{2}}+6$, откуда $a=\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=5$.

Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{9}{5}$; б) $R_1=\frac{5\sqrt{5}}{6}$, $R_2=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2=\alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P=\frac{\pi}{2}-\angle O_2BE=\alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2}=2S_{O_1BO_2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha=R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE=\frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha=R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}}=\frac{R_1}{R_2\cos\alpha}=5$, то есть $\frac{1}{5}R_1=R_2\cos\alpha$. Далее, $AB=DP$, откуда $2R_1=R_2+R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1=R_2+\frac{1}{5}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1}=\frac{9}{5}$.

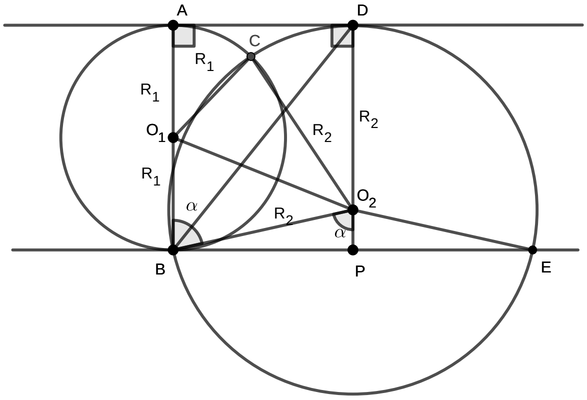

Рис. 12: вариант 16, задача 6

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2 \sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2 \cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5}$ и $4R_1R_2 = 5^2 = 25$. Отсюда $R_1 = \frac{5\sqrt{5}}{6}$, $R_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 70 + x - 4^{70}, \\ y \leqslant \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 4^{140} - \frac{5}{6} \cdot 4^{70} + \frac{214}{3}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = 70 + x - 4^{70}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f\left(4^{70}\right) = \log_4 4^{70} = 70 = 70 + 4^{70} - 4^{70} = g\left(4^{70}\right)$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 70)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 4^{70} = \frac{\left(1+4^{70}\right)4^{70}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_4 4^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $4^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (4-1) + (4^2-1) + \ldots + (4^{70} - 1) = 4 \cdot \frac{4^{70}-1}{3} - 70 = \frac{4^{71}-214}{3}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{\left(1+4^{70}\right)4^{70}}{2} - \frac{4^{71}-214}{3} = \frac{1}{2} \cdot 4^{140} - \frac{5}{6} \cdot 4^{70} + \frac{214}{3}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Доказано, что $p - q$ равно вероятности выпадения орла (решки) фиксированное количество раз – 1 балл;

   найдено количество способов, при которых орёл (решка) выпадает фиксированное количество раз – 1 балл;

   ответ не упрощён (оставлены биномиальные коэффициенты) – баллы не снимаются;

   вместо вероятности посчитано количество соответствующих благоприятных событий – не более 2 баллов за задачу.

---

2. **(5 баллов)** Уравнение сведено к совокупности элементарных тригонометрических уравнений – 2 балла;

   решены элементарные тригонометрические уравнения – 1 балл;

   сделан отбор корней – 2 балла;

   – если отбор сделан только в одном из случаев – 1 балл вместо 2;

   получено уравнение вида $\cos\alpha x \pm \sin\alpha x = \sqrt{2}\sin\beta x$ или $\cos\alpha x \pm \sin\alpha x = \sqrt{2}\cos\beta x$ и дальнейших продвижений нет – 1 балл за задачу.

---

3. **(5 баллов)** Неравенство сведено к кубическому – 2 балла;

   решено полученное кубическое неравенство – 1 балл;

   ответ отличается от верного конечным числом точек (т.е. потеряна изолированная точка или обретено решение $x = 1$) – снять 1 балл за каждую точку;

   ответ отличается от верного бесконечным числом точек за счёт неверного ОДЗ – не более 2 баллов за задачу.

---

4. **(5 баллов)** а) [3 балла] Доказано, что плоскость KLM параллельна касательной плоскости – 1 балл;

   б) [2 балла] решён пункт б) – 2 балла;

   задача решается в предположении, что пирамида правильная – 0 баллов за задачу.

---

5. **(6 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих одному уравнению системы и других продвижений нет ... 2 балла за задачу (если при этом изображено второе множество и потеряно начало координат – 1 балл за задачу);

   верно изображены множества точек, удовлетворяющие каждому из уравнений системы – 3 балла (если при этом изображено второе множество и потеряно начало координат – 2 балла вместо 3);

   за каждое изолированное значение параметра – по 1 баллу.

6. **(5 баллов)** а) [3 балла]; отношение площадей выражено через отношение радиусов и тригонометрическую функцию – 1 балл;

   б) [2 балла]; найдено произведение радиусов – 1 балл.

---

7. **(6 баллов)** Доказано, что абсцисса одной из точек пересечения лежит на интервале $(0;1)$ – 1 балл;

   найдены координаты второй точки пересечения – 1 балл;

   выпуклость вверх графика логарифмической функции и количество точек пересечения графиков обосновывать не обязательно;

   количество точек посчитано, но результат не представлен в требуемом виде – снять 2 балла;

   при подсчёте неверно учтены граничные точки – снять 1 балл.