ВАРИАНТ 3

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ. 2 520.

Решение. Ввиду того, что $700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) две двойки, две пятёрки, одна семёрка и три единицы или (б) четвёрка, две пятёрки, одна семёрка и четыре единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем два места из восьми для расположения двоек ($C_8^2 = \frac{8!}{2!6!}$ способов), затем два места из шести оставшихся для размещения пятёрок ($C_6^2 = \frac{6!}{4!2!}$ способов), затем одно место из четырёх оставшихся для семёрки ($C_4^1 = 4$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot 4 = \frac{8!}{3!2!2!} = 1\,680$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!4!} = 840$.

Окончательно получаем $840 + 1\,680 = 2\,520$ способов.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

Решение. Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q. Так как все её члены положительны, $q > 0$. Если $q = 1$, то $S = 3\,000\,b_1$, а при увеличении членов с номерами, кратными 3, в 50 раз получим сумму $S + 49\left(b_3 + b_6 + \ldots + b_{3\,000}\right) = S + 49 \cdot \frac{S}{3} = \frac{52S}{3}$. Это противоречит условию, следовательно, $q \neq 1$, значит, сумма первых n членов прогрессии может быть посчитана по формуле $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. В частности, $S = b_1 \frac{1-q^{3\,000}}{1-q}$.

При увеличении членов $b_3, b_6, \ldots b_{3\,000}$ в 50 раз получаем сумму

$$S+49\left(b_3+b_6+\ldots+b_{3\,000}\right) = S+49b_3\frac{1-\left(q^3\right)^{1\,000}}{1-q^3} = S+49b_1q^2\frac{1-q^{3\,000}}{(1-q)\left(1+q+q^2\right)} = S+\frac{49q^2S}{1+q+q^2},$$

которая равна $10S$. Отсюда $\frac{49q^2}{1+q+q^2} = 9$, $40q^2 - 9q - 9 = 0$, $q = \frac{3}{5}$ или $q = -\frac{3}{8}$. Нам подходит положительное значение q, т.е. $q = \frac{3}{5}$.

Если увеличить все члены прогрессии с чётными номерами втрое, получаем

$$S + \left(b_2 + b_4 + \ldots + b_{3\,000}\right) = S + b_2 \cdot \frac{1-\left(q^2\right)^{1\,500}}{1-q^2} = = S + b_1 q \frac{1-q^{3\,000}}{(1-q)(1+q)} = S + \frac{q}{1+q} S = \frac{11}{8} S.$$

Значит, сумма S возрастёт в $\frac{11}{8}$ раз.

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

Ответ: 4, $\sqrt{13} - 1$.

Решение. Раскладывая правую часть на множители и умножая обе части на $\sqrt{2}$, получаем $(x+6)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)(x+6)$. Отсюда есть две возможности: либо $x+6 = 0$ (тогда $x = -6$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x + 4)$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2, \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0, \\ x \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)\left(x^2 + 2x - 12\right) = 0, \\ x \geqslant -4. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x = 4$, $x = -1 \pm \sqrt{13}$, и из них неравенству удовлетворяют $x = 4$ и $x = -1 + \sqrt{13}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \geqslant 0$ или $|x-2|^2 - 3x^2|x+2| + 2x^4 \geqslant 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x-2|$ с дискриминантом, равным $(3x^2)^2 - 4 \cdot 2x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{3x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1 = x^2$ и $y_2 = 2x^2$, а неравенство принимает вид $(|x-2| - x^2)(|x-2| - 2x^2) \geqslant 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A - B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. Отсюда получаем

$$\left((x-2)^2 - x^4\right)\left((x-2)^2 - 4x^4\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^2 - x + 2\right)\left(2x^2 + x - 2\right)\left(2x^2 - x + 2\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + x - 2\right)\left(2x^2 + x - 2\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty).$$

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

Ответ: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right); \frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right); \frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right); -\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right); \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right)\right)$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся водомерка и жук $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен π, и при этом $-\pi < \alpha_0 < -\frac{\pi}{2}$, $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$, где α_0, β_0 – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

Расстояние между водомеркой и жуком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 4\sqrt{2}$ и $|AN_0| = 10\sqrt{2}$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = \frac{5}{2}|AM_0|$, то угловая скорость водомерки в 5 раза больше угловой скорости жука.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ жук продвинулся на угол ω. Тогда $\alpha + 5\omega = \beta + \omega + 2\pi n$, где $n = 0, 1, \ldots$ Следовательно, $\omega = \frac{\beta - \alpha}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, 1, \ldots$

Различных точек будет четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$). Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\pi}{4}$. Координаты положения жука найдём по формулам $x_N = 10\sqrt{2}\cos\beta_1$, $y_N = 10\sqrt{2}\sin\beta_1$. Используя координаты точки N_0, находим $\cos\beta_0 = \frac{x_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\sin\beta_0 = \frac{y_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. По формулам косинуса и синуса суммы углов получаем

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_0 \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\beta_0 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{7}}{4},$$

$$\sin\beta_1 = \sin\beta_0 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos\beta_0 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

Отсюда $x_{N_1} = 10\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right)$, $y_{N_1} = 10\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты

$\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right);\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right);-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right);\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right)\right)$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

   Ответ: $CF = 10$, $S_{\triangle ACF} = 7$.

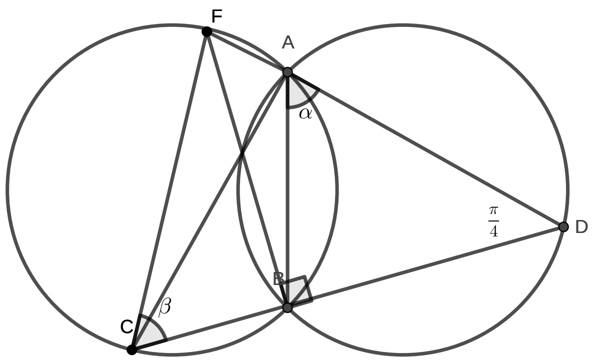

Рис. 1: вариант 3, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 5$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 10$.

б) Так как $\operatorname{tg}\beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\beta = \alpha$. Заметим, что $\cos\beta = \frac{BC}{FC} = \frac{3}{5}$, поэтому $\beta > \frac{\pi}{4}$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB, поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\pi}{4}+\alpha$, поэтому $AC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2}\cdot CA\cdot CF\cdot\sin\angle ACF = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot 2R\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right) = 2R^2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -2R^2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = -R^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right) = -R^2\cos 2\alpha = R^2(1-2\cos^2\alpha) = 7$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

   имеет ровно два решения.

   Ответ: $a \in \{4; 100\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y-6-x=0$ и $y-6+x=0$. Они делят плоскость

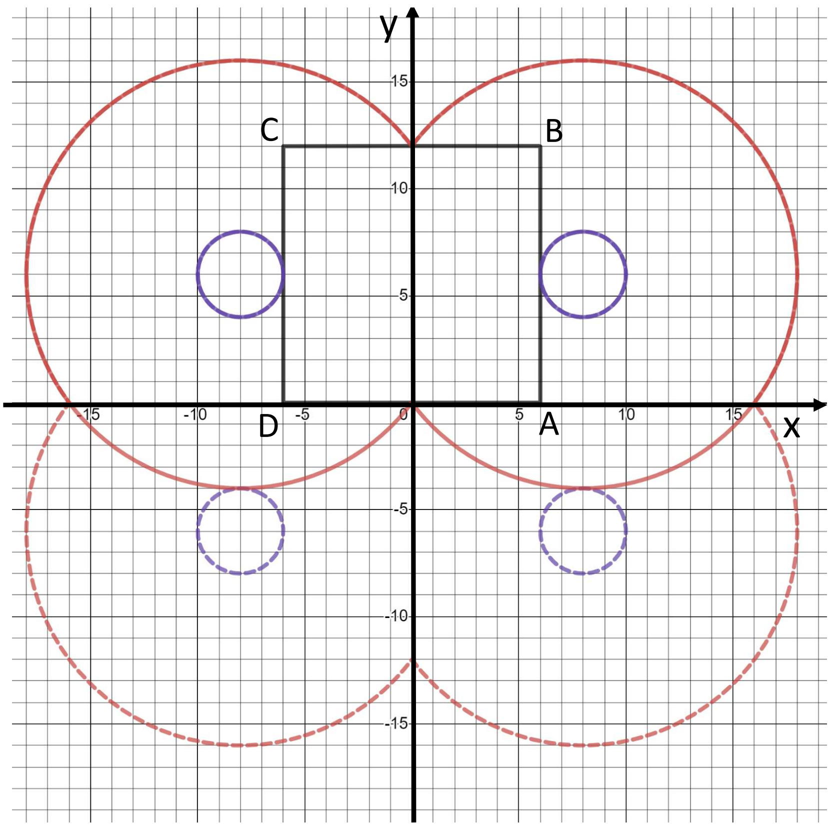

Рис. 2: вариант 3, задача 7

на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0;-10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y-6-x$ и $y-6+x$ отрицательны. Таким образом, уравнение принимает вид $-(y-6-x)-(y-6+x)=12$, откуда $y=0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(6;0)$ и $D(-6;0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(6;0)$, $B(6;12)$, $C(-6;12)$ и $D(-6;0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y<0$, поэтому можно считать, что $y \geqslant 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x|-8)^2+(y-6)^2=a$ (опустив модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a<0$, у уравнения нет решений. При $a=0$ оно задаёт две точки $(8;6)$ и $(-8;6)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K, система не имеет решений, и значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a>0$.

При $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид $(x-8)^2+(y-6)^2=a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(8;6)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geqslant 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy. Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy.

Если $0<a<4$, график $(|x|-8)^2+(y-6)^2=a$ не пересекает квадрат K, и система уравнений не имеет решений. Если $a=4$, система уравнения имеет два решения – точки $X(8;8)$ и $Y(-8;8)$. Если $a \in (4,40]$, дуга окружности $(x-8)^2+(y-6)^2=a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезок AB дважды –

эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (40, 100)$, дуга окружности $(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a = 100$, система уравнений имеет два решения – точки $(0;0)$ и $(0;12)$. Наконец, если $a > 100$, дуга окружности $(x-8)^2+(y-6)^2 = a$, $x \geqslant 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a = 4$ и $a = 100$.

ВАРИАНТ 4

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

   Ответ: 4 200.

   Решение. Ввиду того, что $4900 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) две двойки, две пятёрки, две семёрки и две единицы или (б) четвёрка, две пятёрки, две семёрки и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

   (а) Сначала выбираем два места из восьми для расположения двоек ($C_8^2 = \frac{8!}{2!6!}$ способов), затем два места из шести оставшихся для размещения пятёрок ($C_6^2 = \frac{6!}{4!2!}$ способов), затем два места из четырёх оставшихся для размещения семёрок ($C_4^2 = \frac{4!}{2!2!}$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{2!2!2!2!} \cdot 4 = 2\,520$ способов.

   (б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!2!3!} = 1\,680$.

   Окончательно получаем $2\,520 + 1\,680 = 4\,200$ способов.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3\,000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

   Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

   Решение. Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q. Так как все её члены положительны, $q > 0$. Если $q = 1$, то $S = 3\,000\, b_1$, а при увеличении членов с номерами, кратными 3, в 40 раз получим сумму $S + 39\,(b_3 + b_6 + \ldots + b_{3\,000}) = S + 39 \cdot \frac{S}{3} = 14S$. Это противоречит условию, следовательно, $q \neq 1$, значит, сумма первых n членов прогрессии может быть посчитана по формуле $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. В частности, $S = b_1 \frac{1-q^{3\,000}}{1-q}$.

   При увеличении членов $b_3, b_6, \ldots\ b_{3\,000}$ в 40 раз получаем сумму

   $$S+39\,(b_3 + b_6 + \ldots + b_{3\,000}) = S+39b_3\frac{1-(q^3)^{1\,000}}{1-q^3} = S+39b_1q^2\frac{1-q^{3\,000}}{(1-q)\,(1+q+q^2)} = S+\frac{39q^2S}{1+q+q^2},$$

   которая равна $5S$. Отсюда $\frac{39q^2}{1+q+q^2} = 4$, $35q^2 - 4q - 4 = 0$, $q = \frac{2}{5}$ или $q = -\frac{2}{7}$. Нам подходит положительное значение q, т.е. $q = \frac{2}{5}$.

   Если увеличить все члены прогрессии с чётными номерами втрое, получаем

   $$S+2\,(b_2 + b_4 + \ldots + b_{3\,000}) = S+2\cdot b_2\cdot\frac{1-(q^2)^{1\,500}}{1-q^2} = = S+2b_1q\frac{1-q^{3\,000}}{(1-q)(1+q)} = S+\frac{2q}{1+q}S = \frac{11}{7}S.$$

   Значит, сумма S возрастёт в $\frac{11}{7}$ раз.

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

   Ответ: 6, $\sqrt{13} + 1$.

   Решение. Раскладывая правую часть на множители и умножая обе части на $2\sqrt{2}$, получаем $(x+10)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4)(x+10)$. Отсюда есть две возможности: либо $x + 10 = 0$ (тогда $x = -10$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{8}(x-4)$. Решаем последнее уравнение:

   $$\begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8(x-4)^2, \\ x - 4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 72 = 0, \\ x \geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)\,(x^2 - 2x - 12) = 0, \\ x \geqslant 4. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x = 6$, $x = 1 \pm \sqrt{13}$, и из них неравенству удовлетворяют $x = 6$ и $x = 1 + \sqrt{13}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2| \geqslant 0$ или $|x+2|^2 - 5x^2|x+2| + 4x^4 \geqslant 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x+2|$ с дискриминантом, равным $(5x^2)^2 - 4\cdot 4x^4 = 9x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{5x^2 \pm 3x^2}{2}$, т.е. $y_1 = x^2$ и $y_2 = 4x^2$, а неравенство принимает вид $(|x+2| - x^2)(|x+2| - 4x^2) \geqslant 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A - B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. Отсюда получаем

$$\left((x+2)^2 - x^4\right)\left((x+2)^2 - 16x^4\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + x + 2\right)\left(x^2 - x - 2\right)\left(4x^2 + x + 2\right)\left(4x^2 - x - 2\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 - x - 2\right)\left(4x^2 - x - 2\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty).$$

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

Ответ: $\left(\sqrt{2} - 4; -4 - \sqrt{2}\right)$, $\left(-4 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}\right)$, $\left(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}\right)$, $\left(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4\right)$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся карась и пескарь $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен π, и при этом $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta_0 < 0$, где α_0, β_0 – углы, соответствующие начальным расположениям рыб.

Расстояние между карасём и пескарём будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 3$ и $|AN_0| = 6$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = 2\,|AM_0|$, то угловая скорость карася в 5 раза больше угловой скорости пескаря.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ пескарь продвинулся на угол ω по часовой стрелке. Тогда $\alpha - 5\omega = \beta - \omega - 2\pi n$, где $n = 0, 1, \ldots$ Следовательно, $\omega = \frac{\alpha-\beta}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, 1, \ldots$

Различных точек будет четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$). Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 - \frac{\pi}{4}$. Координаты положения пескаря найдём по формулам $x_N = 6\cos\beta_1$, $y_N = 6\sin\beta_1$. Используя координаты точки N_0, находим $\cos\beta_0 = \frac{x_{N_0}}{6} = \frac{1}{3}$ и $\sin\beta_0 = \frac{y_{N_0}}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. По формулам косинуса и синуса суммы углов получаем

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_0 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\beta_0 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}},$$

$$\sin\beta_1 = \sin\beta_0 \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\beta_0 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}.$$

Отсюда $x_{N_1} = 6 \cdot \frac{1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 4$, $y_{N_1} = 6 \cdot \frac{-1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - 4$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на на углы $-\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты

$\left(-4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2}\right)$, $\left(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2}\right)$, $\left(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4\right)$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

Ответ: $CF = 26$, $S_{\triangle ACF} = 119$.

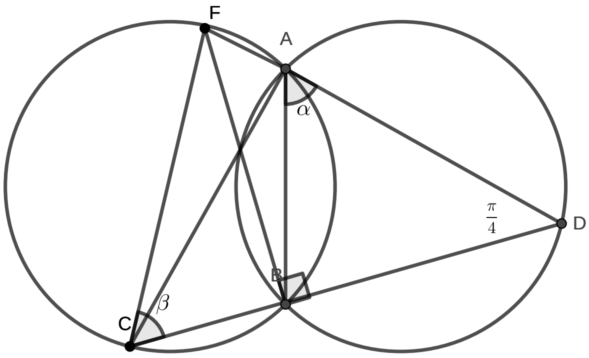

Рис. 3: вариант 4, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 13$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 26$.

б) Так как $\operatorname{tg}\beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\beta = \alpha$. Заметим, что $\cos\beta = \frac{BC}{FC} = \frac{5}{13}$, поэтому $\beta > \frac{\pi}{4}$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB, поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2}\cdot CA\cdot CF\cdot\sin\angle ACF = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot 2R\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right) = 2R^2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -2R^2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = -R^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right) = -R^2\cos 2\alpha = R^2(1-2\cos^2\alpha) = 119$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16, \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{49; 289\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y+x+8=0$ и $y-x+8=0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в

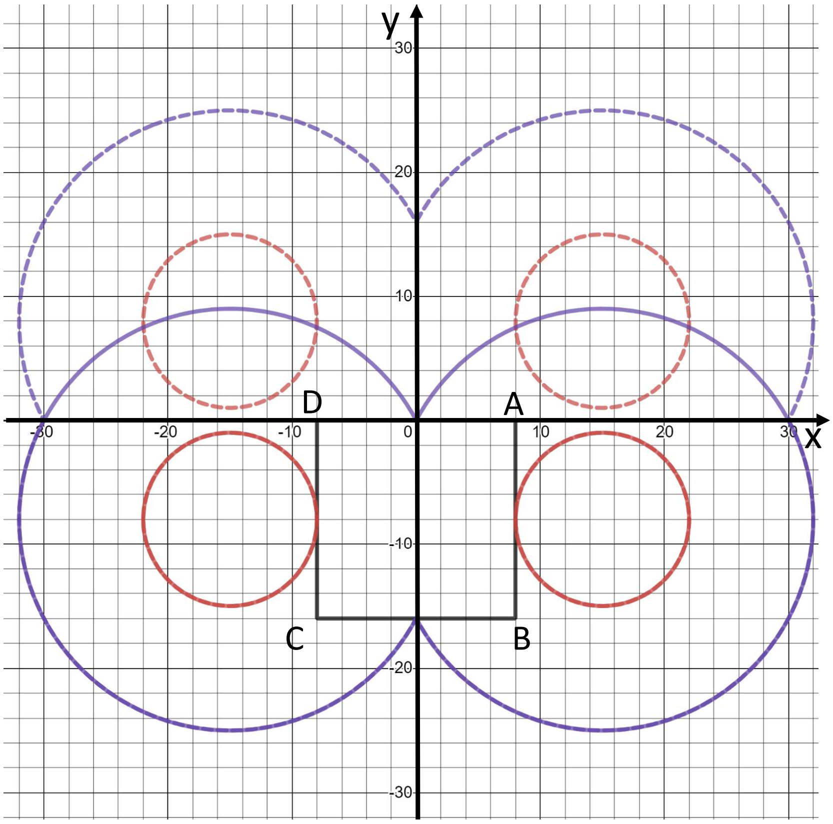

Рис. 4: вариант 4, задача 7

этих точках. Возьмём область, расположенную сверху от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0;10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y+x+8$ и $y-x+8$ положительны. Таким образом, уравнение принимает вид $(y+x+8)+(y-x+8)=16$, откуда $y=0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(8;0)$ и $D(-8;0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(8;0)$, $B(8;-16)$, $C(-8;-16)$ и $D(-8;0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y>0$, поэтому можно считать, что $y \leqslant 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x|-15)^2+(y+8)^2=a$ (раскрыв модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a<0$, у уравнения нет решений. При $a=0$ оно задаёт две точки $(15;-8)$ и $(-15;-8)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K, система не имеет решений, и значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a>0$.

При $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид $(x-15)^2+(y+8)^2=a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(15;-8)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geqslant 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy. Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy.

Если $0<a<49$, график $(|x|-15)^2+(y+8)^2=a$ не пересекает квадрат K, и система уравнений не имеет решений. Если $a=49$, система уравнения имеет два решения – точки $X(8;-8)$ и $Y(-8;-8)$. Если $a \in (49,113]$, дуга окружности $(x-15)^2+(y+8)^2=a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезок AB дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (113,289)$, дуга окружности $(x-15)^2+(y+8)^2=a$,

$x \geqslant 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a = 289$, система уравнений имеет два решения – точки $(0; 0)$ и $(0; -16)$. Наконец, если $a > 289$, дуга окружности $(x-15)^2 + (y+8)^2 = a$, $x \geqslant 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a = 49$ и $a = 289$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(4 балла)** Разобран только один случай 1 балл (при этом балл ставится, даже если результат в случае не сведён к числу);

   разобраны два случая .... 3 балла (при этом баллы ставятся, даже если результат в случае не сведён к числу);

2. **(4 балла)** Ошибка в формуле суммы членов прогрессии .... 0 баллов за задачу.

3. **(4 балла)** Уравнение сведено к кубическому .... 1 балл;

   сокращение обеих частей уравнения на линейную функцию произведено без проверки снять 1 балл;

   получен хотя бы один лишний корень .... не более 2 баллов за задачу;

4. **(6 баллов)** [3 балла] При решении рассмотрением двух случаев: по 3 балла за каждый случай;

   при другом способе решения: левая часть неравенства разложена на множители ..... 3 балла.

5. **(5 баллов)** Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями 2 балла);

   составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты .... 1 балл.

6. **(6 баллов)** Решён пункт а) .... 2 балла;

   решён пункт б) .... 4 балла;

   доказано, что треугольник ACD равнобедренный прямоугольный (или найден один из его острых углов) .... 1 балл (этот балл может суммироваться с 2 баллами за пункт а));

   при решении считается, что точка B – середина CD ..... 0 баллов за дальнейшие рассуждения и не более 1 балла за задачу;

   при решении без обоснования считается, что точка A лежит на отрезке DF 0 баллов за задачу.

7. **(6 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы 2 балла;

   если при этом стороны квадрата не параллельны осям координат не более 3 баллов за задачу;

   за каждое найденное значение параметра .... по 2 балла;

   в ответ включены лишние значения параметра .... не более 4 баллов за задачу.

ВАРИАНТ 11

1. [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

Ответ: Больше вероятность того, что сумма не более 160.

Решение. Результат броска кубиков можно описать набором из 80 чисел от 1 до 6. Рассмотрим какой-либо такой набор. Если каждое из чисел набора заменить с x на $7-x$, получим новый набор, состоящий из чисел от 1 до 6. При этом если сумма чисел в исходном наборе была S, то она станет равной $560-S$. То есть каждому набору с суммой S мы можем поставить в соответствие набор с суммой $560-S$.

Так как $160+400=560$, то количество наборов с суммой больше 400 равно количеству наборов с суммой меньше 160. Отметим также, что все наборы равновероятны. Значит, вероятность выбросить больше 400 равна вероятности выбросить меньше 160. Но вероятность выбросить не больше 160 очков выходит больше выше рассмотренных, так как добавляются способы, в которых сумма составляет ровно 160 очков. Поэтому больше вероятность того, что сумма не превосходит 160.

2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2 \ldots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S, а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S, если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

Ответ: увеличится в $\frac{5}{2}$ раз.

Решение. Сумма членов исходной прогрессии определяется формулой $S_0 = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$, где d – разность прогрессии. Если d увеличить втрое, сумма членов станет равна $S_1 = \frac{2a_1+(n-1)3d}{2} \cdot n$. По условию $S_1 = 2S_0$, откуда получаем $2 \cdot \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)3d}{2} \cdot n$, $4a_1+2(n-1)d = 2a_1+3(n-1)d$, $2a_1 = (n-1)d$.

С учётом этого равенства $S_0 = \frac{2a_1+2a_1}{2} \cdot n = 2a_1 n$. Если разность d увеличить в 4 раза, сумма членов станет равна $S_2 = \frac{2a_1+(n-1)4d}{2} \cdot n = \frac{2a_1+8a_1}{2} \cdot n = 5a_1 n$, что в 2.5 раза больше S_0.

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right)\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \leqslant 0$.

Ответ: $2+\sqrt{3}$.

Решение. Первый множитель в левой части положителен при любых допустимых значениях x. Так как второй множитель всегда неотрицателен, неравенство на ОДЗ (т.е. при условии $x^3+2x-58 \geqslant 0$) равносильно уравнению $x^3-7x^2+13x-3=0$. Одним из целых корней уравнения является $x=3$ (несложно найти подбором среди делителей свободного члена уравнения). Выполнив деление левой части на многочлен $x-3$, раскладываем её на множители: $(x-3)\left(x^2-4x+1\right)=0$. Отсюда $x=3$ или $x=2\pm\sqrt{3}$.

Подставляем полученные значения x в неравенство $x^3+2x-58 \geqslant 0$ для проверки:

$x=3 \Rightarrow 27+6-58 \geqslant 0$ – неверно;

$x=2+\sqrt{3} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^3+2\left(2+\sqrt{3}\right)-58 \geqslant 0 \Leftrightarrow 17\sqrt{3}-28 \geqslant 0$ – верно;

$x=2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^3+2\left(2-\sqrt{3}\right)-58 \geqslant 0 \Leftrightarrow -17\sqrt{3}-28 \geqslant 0$ – неверно.

Следовательно, подходит единственное значение $x=2+\sqrt{3}$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x-4| + 16 = 0$.

Ответ: $-\frac{4}{3}$; 1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Решение. Уравнение можно переписать в виде $3x^4+(x-4)^2-4x^2|x-4| = 0$ или $|x-4|^2-4x^2|x-4|+3x^4 = 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x-4|$ с дискриминантом, равным $(4x^2)^2 - 4\cdot 3x^4 = 4x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{4x^2\pm 2x^2}{2}$, т.е. $y_1 = 3x^2$ и $y_2 = x^2$, а уравнение принимает вид $(|x-4|-3x^2)(|x-4|-x^2) = 0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Отсюда получаем

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = x-4, \\ x^2 = -x+4, \\ 3x^2+x-4=0, \\ 3x^2-x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-4=0, \\ 3x^2+x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}, \\ x = -\dfrac{4}{3}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(2;2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.

Ответ: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right);\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right);\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right);-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right);\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right)\right)$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся водомерка и жук $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен 0, и при этом $0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$, где $\alpha_0 = \beta_0$ – угол, соответствующий начальному расположению насекомых.

Расстояние между водомеркой и жуком будет наибольшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен π. Поскольку $|AM_0| = 4\sqrt{2}$ и $|AN_0| = 10\sqrt{2}$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = \frac{5}{2}|AM_0|$, то угловая скорость водомерки в 5 раза больше угловой скорости жука.

Пусть к моменту, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ противоположно направлены, жук продвинулся на угол ω. Тогда $\alpha_0+\omega+\pi+2\pi k = \alpha_0+5\omega$, где $k = 0,1,2,\ldots$ Следовательно, $\omega = \frac{\pi+2\pi k}{4}$, где $k = 0,1,2,\ldots$

Различных точек будет четыре (при $k = 0,1,2,3$). Для $k=0$ получаем $\beta_1 = \beta_0+\frac{\pi}{4}$. Координаты положения жука найдём по формулам $x_N = 10\sqrt{2}\cos\beta_1$, $y_N = 10\sqrt{2}\sin\beta_1$. Используя координаты точки N_0, находим $\cos\beta_0 = \frac{x_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\sin\beta_0 = \frac{y_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. По формулам косинуса и синуса суммы углов получаем

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_0\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\beta_0\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{7}}{4},$$

$$\sin\beta_1 = \sin\beta_0\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos\beta_0\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

Отсюда $x_{N_1} = 10\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right)$, $y_{N_1} = 10\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты

$\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right);\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right);-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}\right);\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}-1\right)\right)$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 1$.

   Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{3}$, $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

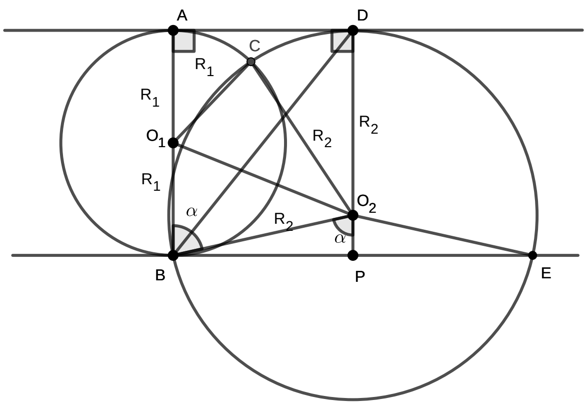

Рис. 1: вариант 11, задача 6

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1BO_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 \cdot \sin\alpha = R_1R_2 \sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P \cdot BE = \frac{1}{2}R_2\cos\alpha \cdot 2R_2\sin\alpha = R_2^2 \sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{3}{2} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2\cos\alpha}$, то есть $\frac{2}{3}R_1 = R_2\cos\alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{2}{3}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{3}$.

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2\sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2\cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{3}$ и $4R_1R_2 = 1^2 = 1$. Отсюда $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 64, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100 \end{cases}$$

   имеет ровно два решения.

   Ответ: $a \in \left\{-8 - 12\sqrt{2}\right\} \cup (-24; -8] \cup [8; 24) \cup \left\{12\sqrt{2} + 8\right\}$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули, мы получаем $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$. Это уравнение задаёт окружность с центром $A(6; 8)$ радиуса 10. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0; 0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (обозначим это множество через M – см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой окружность Ω радиуса 8 с центром в точке $F(0; a)$.

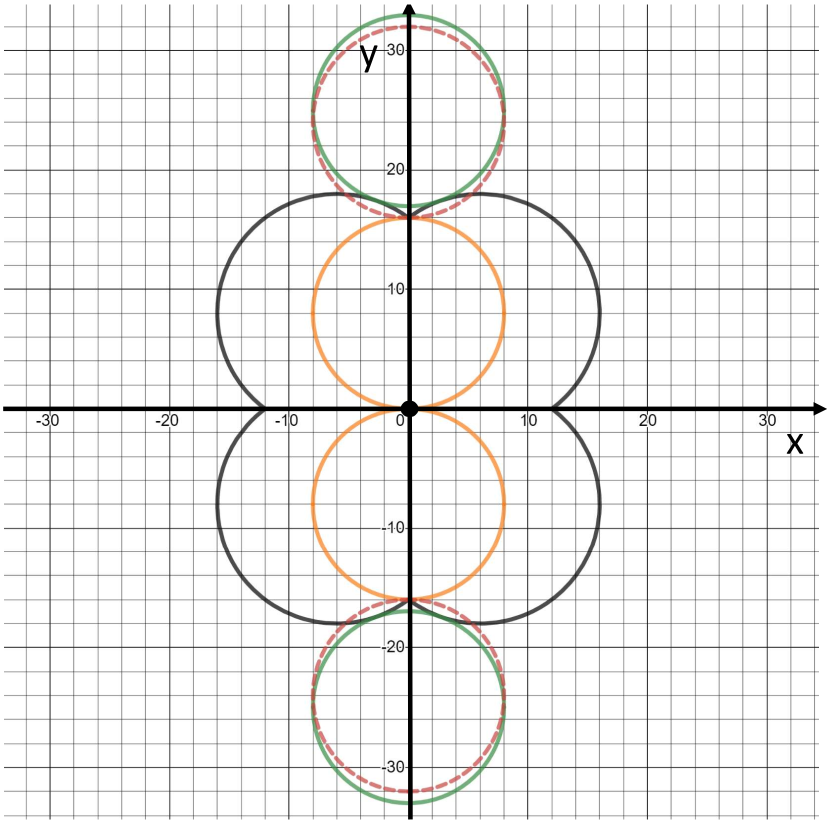

Рис. 2: вариант 11, задача 7

Рассмотрим положительные значения a.

Если $0 < a < 8$, окружность Ω не имеет общих точек с множеством M.

Если $a = 8$, получаем два решения (точки $(0; 0)$ и $(0; 16)$).

Если $8 < a < 24$, система имеет два решения.

При $a = 24$ окружность Ω имеет три общие точки с множеством M (изображена пунктиром на рисунке).

Если $24 < a < 8 + 12\sqrt{2}$, Ω дважды пересекается с фигурой M в первой четверти и дважды в четвёртой четверти – итого имеем четыре решения.

Наконец при $a = 8 + 12\sqrt{2}$ у Ω и M есть ровно две общие точки (случай касания – см чертёж).

Значение $a = 8 + 12\sqrt{2}$, при котором окружности касаются, можно найти следующим образом. Пусть $P(0; a)$ – положение центра окружности, при котором происходит касание, $H(8; 0)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось ординат. Тогда $AH = 6$; отрезок AP есть расстояние между центрами касающихся окружностей, поэтому он равен сумме радиусов, т.е. $AP = 10 + 8 = 25$. Тогда по теореме Пифагора из треугольника AHP получаем $HP = \sqrt{18^2 - 6^2} = 288$. Значит, точка P имеет абсциссу $8 + \sqrt{288} = 8 + 12\sqrt{2}$, $a = 8 + 12\sqrt{2}$.

Итак, среди положительных a подходят $a \in [8; 24) \cup \{12\sqrt{2}\}$. В силу симметрии для отрицательных значений параметра получаем $a \in \{-12\sqrt{2}\} \cup (-24; -8]$. Также очевидно, что не подходит значение $a = 0$. Следовательно, $a \in \{-12\sqrt{2}\} \cup (-24; -8] \cup [8; 24) \cup \{12\sqrt{2}\}$.

ВАРИАНТ 12

1. [5 баллов] Бросили 90 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что эта сумма не меньше 500, или того, что эта сумма меньше 130?

Ответ: Больше вероятность того, что сумма не меньше 500.

Решение. Результат броска кубиков можно описать набором из 90 чисел от 1 до 6. Рассмотрим какой-либо такой набор. Если каждое из чисел набора заменить с x на $7-x$, получим новый набор, состоящий из чисел от 1 до 6. При этом если сумма чисел в исходном наборе была S, то она станет равной $630-S$. То есть каждому набору с суммой S мы можем поставить в соответствие набор с суммой $560-S$.

Так как $130+500=630$, то количество наборов с суммой больше 500 равно количеству наборов с суммой меньше 130. Отметим также, что все наборы равновероятны. Значит, вероятность выбросить больше 500 равна вероятности выбросить меньше 130. Но вероятность выбросить не меньше 500 очков выходит больше выше рассмотренных, так как добавляются способы, в которых сумма составляет ровно 500 очков. Поэтому больше вероятность того, что сумма не меньше 500.

2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2 \ldots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S, а $a_1>0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 4 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 3 раза. А во сколько раз увеличится S, если разность исходной прогрессии увеличить в 2 раза (оставив первый член неизменным)?

Ответ: увеличится в $\frac{5}{3}$ раз.

Решение. Сумма членов исходной прогрессии определяется формулой $S_0=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, где d – разность прогрессии. Если d увеличить в четыре раза, сумма членов станет равна $S_1=\frac{2a_1+(n-1)4d}{2}\cdot n$. По условию $S_1=3S_0$, откуда получаем $3\cdot\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)4d}{2}\cdot n$, $6a_1+3(n-1)d=2a_1+4(n-1)d$, $4a_1=(n-1)d$.

С учётом этого равенства $S_0=\frac{2a_1+4a_1}{2}\cdot n=3a_1n$. Если разность d увеличить в 2 раза, сумма членов станет равна $S_2=\frac{2a_1+(n-1)2d}{2}\cdot n=\frac{2a_1+8a_1}{2}\cdot n=5a_1n$, что в $\frac{5}{3}$ раза больше S_0.

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3+x-90}+7\right)\left|x^3-10x^2+31x-28\right|\leqslant 0$.

Ответ: $3+\sqrt{2}$.

Решение. Первый множитель в левой части положителен при любых допустимых значениях x. Так как второй множитель всегда неотрицателен, неравенство на ОДЗ (т.е. при условии $x^3+x-90\geqslant 0$) равносильно уравнению $x^3-10x^2+31x-28=0$. Одним из целых корней уравнения является $x=4$ (несложно найти подбором среди делителей свободного члена уравнения). Выполнив деление левой части на многочлен $x-4$, раскладываем её на множители: $(x-4)\left(x^2-6x+7\right)=0$. Отсюда $x=4$ или $x=3\pm\sqrt{2}$.

Подставляем полученные значения x в неравенство $x^3+x-90\geqslant 0$ для проверки:

$x=4 \Rightarrow 64+4-90\geqslant 0$ – неверно;

$x=3-\sqrt{2}\Rightarrow\left(3-\sqrt{2}\right)^3+\left(3-\sqrt{2}\right)-90\geqslant 0\Leftrightarrow -30\sqrt{2}-42\geqslant 0$ – неверно;

$x=3-\sqrt{2}\Rightarrow\left(3+\sqrt{2}\right)^3+\left(3+\sqrt{2}\right)-90\geqslant 0\Leftrightarrow 30\sqrt{2}-42\geqslant 0$ – верно;

Следовательно, подходит единственное значение $x=3+\sqrt{2}$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $5x^4 + x^2 + 8x - 6x^2|x+4| + 16 = 0$.

Ответ: $-\frac{4}{5}$; 1; $\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Решение. Уравнение можно переписать в виде $5x^4+(x+4)^2-6x^2|x+4| = 0$ или $|x+4|^2-6x^2|x+4|+5x^4 = 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x+4|$ с дискриминантом, равным $\left(6x^2\right)^2 - 4\cdot 5x^4 = 16x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{6x^2\pm 4x^2}{2}$, т.е. $y_1 = 5x^2$ и $y_2 = x^2$, а уравнение принимает вид $\left(|x+4| - 5x^2\right)\left(|x+4| - x^2\right) = 0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Отсюда получаем

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = x+4, \\ x^2 = -x-4, \\ 5x^2+x+4 = 0, \\ 5x^2 - x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 4 = 0, \\ 5x^2 - x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}, \\ x = -\dfrac{4}{5}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(-2; 4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет наибольшим.

Ответ: $\left(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2}\right)$, $\left(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4\right)$, $\left(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}-4; 4-\sqrt{2}\right)$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся карась и пескарь $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен 0, и при этом $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$, где $\alpha_0 = \beta_0$ – угол, соответствующий начальному расположению насекомых.

Расстояние между карасём и пескарём будет наибольшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен π. Поскольку $|AM_0| = 3$ и $|AN_0| = 6$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = 2\,|AM_0|$, то угловая скорость карася в 5 раза больше угловой скорости пескаря.

Пусть к моменту, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ противоположно направлены, пескарь продвинулся на угол ω. Тогда $\alpha_0 - \omega + \pi + 2\pi k = \alpha_0 - 5\omega$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\omega = -\frac{\pi+2\pi k}{4}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Различных точек будет четыре (при $k = 0, 1, 2, 3$). Для $k = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 - \frac{\pi}{4}$. Координаты положения жука найдём по формулам $x_N = 10\sqrt{2}\cos\beta_1$, $y_N = 10\sqrt{2}\sin\beta_1$. Используя координаты точки N_0, находим $\cos\beta_0 = \frac{x_{N_0}}{6} = -\frac{1}{3}$ и $\sin\beta_0 = \frac{y_{N_0}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. По формулам косинуса и синуса разности углов получаем

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_0\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\beta_0\cdot\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}},$$

$$\sin\beta_1 = \sin\beta_0\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\beta_0\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}.$$

Отсюда $x_{N_1} = 6\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}} = 4-\sqrt{2}$, $y_{N_1} = 6\cdot\frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}} = 4+\sqrt{2}$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат по часовой стрелке на углы $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты

$\left(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4\right)$, $\left(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}-4; 4-\sqrt{2}\right)$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{4}{3}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

   Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{4}$, $R_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $R_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

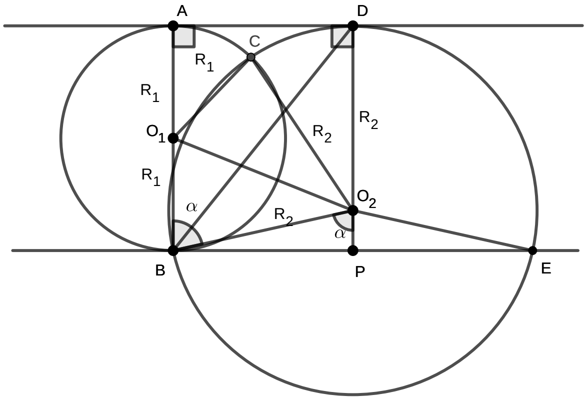

Рис. 3: вариант 12, задача 6

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1BO_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 \cdot \sin\alpha = R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P \cdot BE = \frac{1}{2}R_2\cos\alpha \cdot 2R_2\sin\alpha = R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{4}{3} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2\cos\alpha}$, то есть $\frac{3}{4}R_1 = R_2\cos\alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{3}{4}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{4}$.

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2\sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2\cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{4}$ и $4R_1R_2 = 1^2 = 4$. Отсюда $R_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $R_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 64, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{-28\} \cup (-24; -8] \cup [8; 24) \cup \{28\}$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули, мы получаем $(x-8)^2 + (y-15)^2 = 289$. Это уравнение задаёт окружность с центром $A(8; 15)$ радиуса 17. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0; 0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (обозначим это множество через M – см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой окружность Ω радиуса 8 с центром в точке $F(a; 0)$.

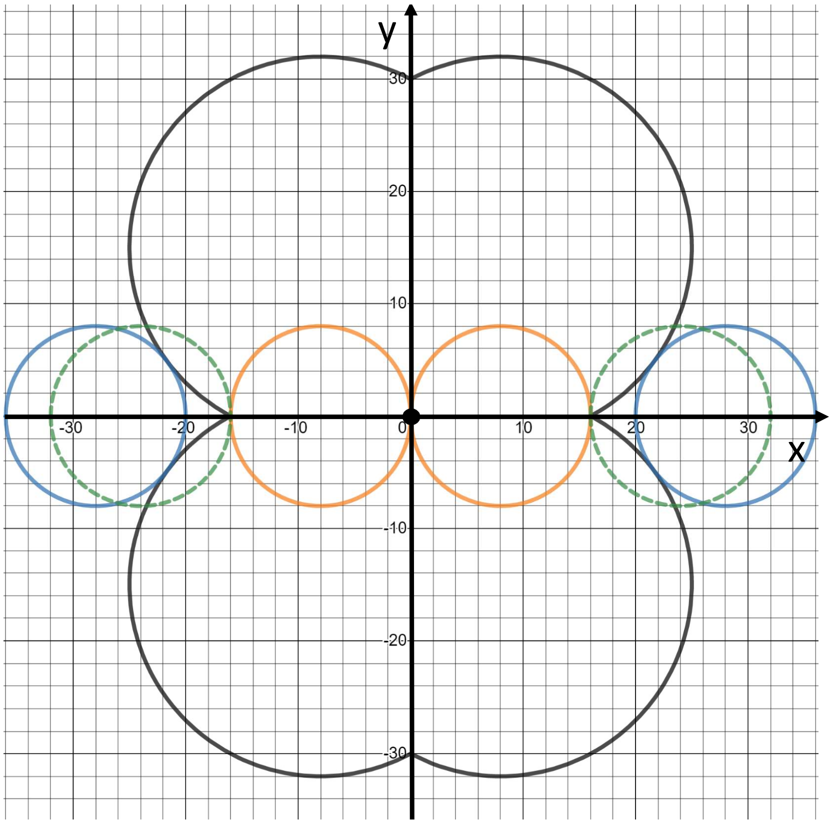

Рис. 4: вариант 12, задача 7

Рассмотрим положительные значения a.

Если $0 < a < 8$, окружность Ω не имеет общих точек с множеством M.

Если $a = 8$, получаем два решения (точки $(0;0)$ и $(16;0)$).

Если $8 < a < 24$, система имеет два решения.

При $a = 24$ окружность Ω имеет три общие точки с множеством M (изображена пунктиром на рисунке).

Если $24 < a < 28$, Ω дважды пересекается с фигурой M в первой четверти и дважды в четвёртой четверти – итого имеем четыре решения.

Наконец при $a = 28$ у Ω и M есть ровно две общие точки (случай касания – см чертёж).

Значение $a = 28$, при котором окружности касаются, можно найти следующим образом. Пусть $P(a;0)$ – положение центра окружности, при котором происходит касание, $H(8;0)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось абсцисс. Тогда $AH = 15$; отрезок AP есть расстояние между центрами касающихся окружностей, поэтому он равен сумме радиусов, т.е. $AP = 17 + 8 = 25$. Тогда по теореме Пифагора из треугольника AHP получаем $HP = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. Значит, точка P имеет абсциссу $8 + 20 = 28$, $a = 28$.

Итак, среди положительных a подходят $a \in [8;24) \cup \{28\}$. В силу симметрии для отрицательных значений параметра получаем $a \in \{-28\} \cup (-24;-8]$. Также очевидно, что не подходит значение $a = 0$. Следовательно, $a \in \{-28\} \cup (-24;-8] \cup [8;24) \cup \{28\}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(5 баллов)** Показано, что вероятность выпадения суммы k очков и $560-k$ (или $630-k$) очков одинаковы – 3 балла.

---

2. **(4 балла)** Ошибка в формуле суммы членов прогрессии – 0 баллов за задачу.

---

3. **(4 балла)** Получена система из кубического уравнения и кубического неравенства – 1 балл;

   решено кубическое уравнение – 1 балл;

   сделан отбор корней – 2 балла;

   не учтено ОДЗ – не более 1 балла за задачу.

---

4. **(5 баллов)** Левая часть уравнения разложена на множители – 2 балла;

   рассмотрено равенство нулю только одного из двух получившихся множителей – 1 балл.

   При другом способе решения (раскрытие модуля по определению в исходном уравнении): рассмотрен только один случай раскрытия модуля – 2 балла.

---

5. **(5 баллов)** Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями – 2 балла;

   составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты – 1 балл.

---

6. **(5 баллов)** а) [3 балла] отношение площадей выражено через отношение радиусов и тригонометрическую функцию – 1 балл;

   б) [2 балла] найдено произведение радиусов – 1 балл.

---

7. **(7 баллов)** Описано множество, задаваемое первым уравнением системы – 1 балл;

   построено множество точек, удовлетворяющих второму уравнению системы – 2 балла,

   – если при этом потеряно начало координат, то 1 балл вместо 2;

   найдены значения параметра, при которых дуги окружностей касаются – 1 балл;

   найдены два промежутка значений параметра – 3 балла;

   – если при этом получены интервалы вместо полуинтервалов, то 2 балла вместо 3.