

Онлайн этап олимпиады Phystech.International

11 класс

1. Найдите сумму корней уравнения param1.

param1	Ответ
$\log_3(9^{x+0,5} + 54) - \log_3(2018 - 3^{x+1,5}) = x - 0,5$	
$\log_3(9^{x+0,5} + 243) - \log_3(2(2018 - 3^{x-0,5})) = x + 1,5$	
$\log_3(9^{x+1} + 243) - \log_3(2(2018 + 3^{x+1,5})) = x - 0,5$	
$\log_2(4^{x+1,5} + 96) - \log_2(2018 + 2^{x-0,5}) = x + 1,5$	
$\log_2(4^{x+2,5} + 240) - \log_2(2018 + 2^{x+1,5}) = x - 0,5$	

2. Найдите **наибольшее возможное значение** корня уравнения $(x-a)(x-b) = (x-c)(x-d)$, если известно, что param1 и $a \neq c$ (сами числа a, b, c, d не даны).

param1	Ответ
$a+d = b+c = 1100$	
$a+d = b+c = 700$	
$a+d = b+c = 1300$	
$a+d = b+c = 850$	
$a+d = b+c = 1250$	

3. Дана арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots, a_n , у которой param1. Найдите n , если известно, что param2.

param1	param2	Ответ
$a_1 = 3, a_n = 20$	$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = 7$	
$a_1 = 5, a_n = 10$	$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = 11$	
$a_1 = 12, a_n = 2$	$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = 20$	
$a_1 = 1, a_n = 25$	$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = 10$	
$a_1 = 15, a_n = 4$	$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = 11$	

4. Окружность Γ , вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке K , а стороны AC – в точке T . На меньшей дуге TK окружности Γ выбрана точка P . Прямая, проходящая через точку K параллельно прямой AP , вторично пересекает окружность Γ в точке N . Найдите PK , если известно, что $AP = \text{param1}$, $KN = \text{param2}$.

param1	param2	Ответ
4	25	
6	24	
4	9	
25	4	
8	2	

5. На основании AD трапеции $ABCD$ выбрали точку K . Оказалось, что $AB=BK$ и $KC=CD$. Известно, что отношение площадей треугольников ABK и KCD равно $param1$, а радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABK и KCD , равны соответственно $param2$ и $param3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник KBC .

param1	param2	param3	ответ
3,5	7	4	
13/3	13	9	
5	5	2	
3	9	6	

6. Найдите сумму корней уравнения $param1$, лежащих на интервале $param2$.

param1	param2	Ответ
$\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) -$ $-2\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) +$ $+\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 1$	(9;12)	
$\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) - \sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) +$ $+6\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) -$ $-\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 1$	(15;18)	
$\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) +$ $+6\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) +$ $+\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 1$	(9;12)	
$\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) - \sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) -$ $-2\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) -$ $-\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 1$	(15;18)	

7. Взяли натуральные числа $param1$ и написали эти $param2$ вдоль верхней стороны таблицы $param3$ (по одному числу над каждым столбцом), и эти же $param2$ записали вдоль левой стороны таблицы (по одному числу слева от каждой строки). В клетки таблицы записали произведения соответствующих чисел («таблица умножения»). Какое количество произведений в этой таблице делится на 6?

$param1$	$param2$	$param3$	Ответ
от 15 до 84	70 чисел	70×70	
от 13 до 75	63 числа	63×63	
от 11 до 80	70 чисел	70×70	
от 18 до 85	68 чисел	68×68	
от 10 до 78	69 чисел	69×69	

8. По итогам волейбольного турнира, проведенного в один круг (т.е. каждая команда сыграла с каждой одну игру), оказалось, что первые десять команд выиграли у каждой из остальных команд, а сумма очков, набранных первыми десятью командами, на $param1$ больше, чем сумма очков, набранных остальными командами. Какое **наибольшее** количество команд могло участвовать в таком турнире? (За победу в игре дается 1 очко, за поражение – 0; ничьих в волейболе не бывает.)

$param1$	Ответ
100	
99	
97	
85	

9. Найдите $param1$, если $param2$ для всех действительных x , и $param3$.

$param1$	$param2$	$param3$	Ответ
$f(250)$	$f(x+3) = f(x) + x^2 + x - 7$	$f(1) = 1$	
$f(400)$	$f(x+3) = f(x) + x^2 - x + 3$	$f(1) = 2$	
$f(430)$	$f(x+3) = f(x) + x^2 + 2x + 1$	$f(1) = 15$	
$f(310)$	$f(x+3) = f(x) - x^2 + x - 5$	$f(1) = 3$	
$f(370)$	$f(x+3) = f(x) - x^2 - x + 11$	$f(1) = -5$	

10. В клетки прямоугольной доски $param1$ поставили фишки. Оказалось, что для любой фишки либо в столбце, либо в строке, где эта фишка стоит, больше фишек нет. Какое **наибольшее** количество фишек может стоять на доске?

$param1$	Ответ
20×50	
25×60	
30×75	
55×35	
70×45	