**Онлайн тур олимпиады «Физтех»**

| 11 класс | 10 класс | 9 класс | 8 класс | 7 класс |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 14 | 16 |
| 2 | 2 | 2 | 15 | 18 |
| 3 | 3 | 11 | 16 | 19 |
| 4 | 4 | 12 | 17 | 20 |
| 5 | 13 | 13 | 18 | 21 |
| 6 | 26 | 14 | 20 | 22 |
| 7 | 7 | 7 | 21 | 23 |
| 8 | 12 | 15 | 22 | 24 |
| 9 | 11 | 17 | 23 | 27 |
| 10 | 10 | 26 | 25 | 28 |

**1.** Найдите наименьшее натуральное а такое, что выражение param1 делится на param2.

| param1 | param2 |
|---|---|
| $a(a+4)(a+8)(a+12)(a+16)$ | $10^6$ |
| $a(a+8)(a+16)(a+24)(a+32)$ | $10^7$ |
| $a(a+12)(a+24)(a+36)(a+48)$ | $10^6$ |
| $a(a+16)(a+32)(a+48)(a+64)$ | $10^7$ |

**2.** Известно, что для положительных чисел $a$, $b$, $c$ каждое из трех уравнений
$ax^2$+param1$bx+c=0$,
$bx^2$+param1$cx+a=0$,
$cx^2$+param1$ax+b=0$
имеет хотя бы один действительный корень.
Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно param2? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня).

| param1 | param2 |
|---|---|
| 10 | 7 |
| 20 | 11 |
| 15 | 9 |
| 10 | 9 |
| 15 | 27 |

**3.** Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых шести её членов равно param1. Найдите количество таких прогрессий.

| param1 |
|---|
| $20^{732}$ |
| $40^{612}$ |
| $162^{603}$ |
| $72^{612}$ |
| $800^{327}$ |

**4.** Пусть param1. Какое наибольшее значение может принимать param2?

| param1 | param2 |
|---|---|
| $\dfrac{25\cos^2 x-29+40\sin x}{36-25\sin^2 x+30\cos x}=6$ | $3\sin x$ |
| $\dfrac{16\sin^2 x-21-8\sqrt{7}\cos x}{27-16\cos^2 x-24\sin x}=1$ | $5\sin x$ |
| $\dfrac{21-16\sin^2 x+8\cos x}{16\cos^2 x-29-8\sqrt{15}\sin x}=2$ | $7\cos x$ |
| $\dfrac{67-36\cos^2 x+60\sin x}{36\sin^2 x-45+12\sqrt{11}\cos x}=3$ | $15\sin x$ |

**5.** Даны парабола param1 и прямая param2. Какую наибольшую площадь может иметь квадрат, две вершины которого лежат на параболе, а две другие – на этой прямой?

| param1 | param2 |
|---|---|
| $y=2x^2$ | $y=x-2$ |
| $y=4x^2$ | $y=x-1$ |
| $y=5x^2$ | $y=x-0,4$ |
| $y=4x^2$ | $y=x-0,5$ |
| $y=10x^2$ | $y=x-0,2$ |

**6.** Две окружности $\omega$ и $\Omega$ радиусов $R$ = param1 и $r$ = param2 касаются внутренним образом. Хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается окружности $\omega$ в точке $C$. Найдите длину хорды $AB$, если известно, что $AC : BC = 1 : 2$.

| param1 | param2 |
|---|---|
| 12,5 | 4 |
| 13,25 | 9 |
| 20 | 16 |
| 28,25 | 25 |
| 41 | 36 |

**7.** Найдите наименьшее значение параметра $p$, для которого при всех $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le param1,\ 0 \le z \le param2$ выполняется неравенство $xyz + p \ge param3x + param2y + param1z$ ?

| param1 | param2 | param3 |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 15 |
| 2 | 7 | 19 |
| 3 | 5 | 17 |
| 2 | 5 | 13 |
| 2 | 4 | 11 |

**8.** Какое наибольшее значение может принимать модуль синуса суммы углов, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} tgx = param1\cos y \\ tgy = param1\cos z \\ tgz = param1\cos x \end{cases} ?$$

| param1 |
|---|
| $\frac{12}{7}$ |
| $\frac{20}{9}$ |
| $\frac{90}{19}$ |
| $\frac{56}{15}$ |

**9.** Треугольная пирамида $SABC$ ($S$ – вершина) обладает следующими свойствами:
1) длины проекций боковых ребер на плоскости боковых граней, не содержащих эти ребра (то есть проекция ребра $SA$ на плоскость грани $SBC$, и так далее) – равны между собой;
2) длины проекций боковых ребер на плоскость основания пирамиды также равны между собой. Известно, что $\cos ASB$ = param1, $AB$ = param2. Найдите сумму периметров оснований всех пирамид, обладающих указанными свойствами.

| param1 | param2 |
|---|---|
| $-\frac{3}{5}$ | 3 |
| $-\frac{4}{5}$ | 2 |
| $-\frac{15}{17}$ | 6 |
| $-\frac{21}{29}$ | 1 |

| | |
|---|---|
| $-\frac{12}{13}$ | 2 |

**10.** В некотором государстве param1 городов. Каждая пара городов соединена авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Оказалось, что из каждого города выходит ровно param2 авиарейсов первой авиакомпании. Назовем тройку городов *A*, *B*, *C замкнутой*, если все три авиарейса *AB*, *BC*, *CA*, осуществляются одной авиакомпанией. Каково наибольшее возможное количество замкнутых троек городов может быть в этом государстве?

| param1 | param2 |
|---|---|
| 35 | 12 |
| 37 | 8 |
| 36 | 8 |
| 30 | 10 |
| 40 | 6 |

**11.** Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа $k$. Пусть $n$ – наименьшее натуральное число такое, что param1. В ответ запишите пятизначное число, первые две цифры которого совпадают с первыми двумя цифрами числа param2, а последние три – с последними тремя цифрами числа param2. Например, если param2=1234567890, то в ответ нужно записать число 12890.

| param1 | param2 |
|---|---|
| $S(n) + S(n+61) = 4000$ | $n+61$ |
| $S(n) + S(n+41) = 12000$ | $n+41$ |
| $S(n) + S(n+21) = 14000$ | $n+21$ |
| $S(n) + S(n+81) = 4000$ | $n+81$ |

**12.** Пусть *AC* – наибольшая сторона треугольника *ABC*. На отрезке *AC* выбраны точки *K* и *M* так, что *AM* = *AB* и *CK* = *CB*. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника *KBM*, равен param1, радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, равен param2, и эта окружность касается стороны *BC* в точке *T*. Найдите квадрат длины отрезка *BT*.

| param1 | param2 |
|---|---|
| 13 | 11 |
| 11 | 7 |
| 12 | 7 |
| 10 | 9 |
| 9 | 5 |

**13.** Пусть $a$, $b$, $c$ – различные натуральные числа с суммой param1. Найдите максимально возможное значение суммы корней уравнения $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$.

| param1 |
|---|
| 800 |
| 1000 |
| 1060 |
| 1330 |
| 1450 |

**14.** Найдите натуральное число $n$, для которого выполняется равенство param1.

| param1 |
|---|
| $\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{553}{598}$ |
| $\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{3906}{4225}$ |
| $\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2439}{2639}$ |
| $\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{1862}{2015}$ |
| $\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2979}{3224}$ |

**15.** Из карточек, на которых написаны цифры param1 составляются натуральные числа, делящиеся на param2. Сколькими способами это можно сделать? (некоторые карточки при составлении чисел можно не использовать, число не может начинаться на 0).

| param1 | param2 |
|---|---|
| 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4 | 36 |
| 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 | 36 |
| 0, 2, 2, 3, 3, 3, 5 | 45 |
| 0, 0, 3, 3, 3, 4, 5 | 45 |

**16.** За круглым столом сидят гномы. Гномы по кругу передают горшок с золотыми монетами. Первый гном взял из горшка 1 монету, второй – 2, третий – 3 и так далее. Каждый следующий брал ровно на одну монету больше. Оказалось, что на param1 круге гномы суммарно взяли на param2 монет больше, чем на первом. Какое наибольшее количество гномов могло сидеть за столом?

| param1 | param2 |
|---|---|
| третьем | 338 |
| третьем | 648 |
| четвертом | 507 |

| | |
|---|---|
| четвертом | 675 |

**17.** Вася вырезал из волейбольной сетки кусок param1 ячеек. Петя красит эту сетку следующим образом. Он выбирает любой квадрат (из ячеек сетки) и красит его границу. Какое наименьшее число квадратов он должен покрасить, чтобы вся сетка оказалась покрашенной? Выбираемый квадрат может быть любого размера. Разрешается красить куски сетки несколько раз

| param1 |
|---|
| 35×35 |
| 31×31 |
| 41×41 |
| 33×33 |
| 37×37 |

**18.** Таня ездит на велосипеде param1 быстрее своего младшего брата Пети, а на самокате param1 медленнее, чем он на велосипеде. Таня и Петя, стартовав вместе, поехали на велосипедах, и через param2 минуты Таня пересела на самокат. Через сколько минут Петя догонит Таню?

| param1 | param2 |
|---|---|
| вдвое | 3 |
| втрое | 4 |
| вдвое | 5 |
| втрое | 6 |

**19.** В классе param1 человек. Известно, что из любых param2 учащихся этого класса, по крайней мере у одного из них в имени есть буква «а». У какого наименьшего количества учеников в этом классе в имени может быть буква «а»?

| param1 | param2 |
|---|---|
| 28 | 10 |
| 27 | 11 |
| 26 | 9 |
| 25 | 13 |
| 29 | 15 |

**20.** Вася и Маша учатся в одном классе. Мальчиков в этом классе в param1 раза больше, чем девочек. У Васи одноклассников на param2 больше, чем одноклассниц. Сколько одноклассниц у Маши?

| param1 | param2 |
|---|---|
| два | 8 |
| два | 7 |
| два | 6 |
| три | 13 |
| три | 11 |

**21.** Котенок Гав и щенок Шарик нашли сосиску и схватили ее зубами одновременно с двух сторон. Если Шарик откусит свой кусок и уйдет, Гаву достанется на param1 г больше, чем Шарику. Если Гав откусит свой кусок и уйдет, Шарику достанется на param2 г больше, чем Гаву. Сколько грамм сосиски останется, если оба откусят свои куски и уйдут?

| param1 | param2 |
|---|---|
| 20 | 30 |
| 22 | 29 |
| 19 | 28 |
| 21 | 27 |
| 18 | 25 |

**22.** Есть несколько 50-литровых баков. param1. За одну операцию можно перелить из любого бака в другой вдвое больше бензина, чем в нем уже есть. Какой максимальный объем бензина можно собрать в одном баке?

| param1 |
|---|
| В первый налит 1 литр бензина, во второй – 2 литра бензина, в третий – 3 литра бензина, в четвертый – 4 литра бензина, в пятый – 5 литров бензина, в шестой – 6 литров бензина. |
| В первый налит 1 литр бензина, во второй – 2 литра бензина, в третий – 3 литра бензина, в четвертый – 4 литра бензина, в пятый – 5 литров бензина. |
| В первый налит 1 литр бензина, во второй – 2 литра бензина, в третий – 3 литра бензина, в четвертый – 4 литра бензина, в пятый – 5 литров бензина, в шестой – 7 литров бензина, в седьмой – 8 литров бензина |
| В первый налит 1 литр бензина, во второй – 2 литра бензина, в третий – 4 литра бензина, в четвертый – 8 литра бензина, в пятый – 12 литров бензина, в шестой – 12 литров бензина. |

**23.** Петя записал на доске числа param1 и param2. Коля задумал трёхзначное число и разделил оба петиных числа с остатком на задуманное число. В результате деления оказалось, что в обоих случаях в остатке получилось одно и то же двухзначное число. Найдите это двузначное число.

| param1 | param2 |
|---|---|
| 206542 | 246151 |
| 874930 | 915511 |
| 737181 | 779220 |
| 485626 | 521833 |
| 420310 | 457003 |

**24.** Число, состоящее из *N* цифр param1 (других цифр в числе нет), умножили на число param2. Полученное произведение имеет сумму цифр, равную param3. Найдите *N*.

| param1 | param2 | param3 |
|---|---|---|
| 8 | 8 | 1200 |
| 7 | 4 | 1345 |
| 2 | 41 | 1225 |
| 2 | 23 | 1177 |
| 4 | 16 | 1089 |

**25.** В прямоугольнике *ABCD* стороны *AB*=param1, *AD*=param2. Биссектриса угла *ABD* пересекает прямую *CD* в точке *E*, а биссектриса угла *ADB* пересекает прямую *BC* в точке *F*. Найдите квадрат длины отрезка *EF*.

| param1 | param2 |
|---|---|
| 21 | 20 |
| 35 | 12 |
| 9 | 40 |
| 33 | 56 |
| 11 | 60 |

**26.** На основании *AD* трапеции *ABCD* отмечена точка *F*. Оказалось, что *AB*=*BF* и *FC*=*CD*. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ABF*, *FCD*, *BFC* равны param1, param2 и param3 соответственно. Найдите отношение *AF*:*FD*.

| param1 | param2 | param3 |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 4 |
| 2 | 8 | 5 |
| 3 | 5 | 4 |
| 3 | 8 | 4 |
| 3 | 8 | 6 |

**27.** Олег разрезал клетчатую доску param1 на $N$ прямоугольников param2 и $M$ прямоугольников param3. Какое наименьшее значение может принимать выражение $|M-N|$?

| param1 | param2 | param3 |
|---|---|---|
| 100×50 | 1×3 | 1×4 |
| 97×25 | 1×3 | 1×5 |
| 100×30 | 1×4 | 1×5 |
| 51×64 | 1×3 | 1×7 |

**28.** Катя посчитала, что сейчас суммарный возраст ее, ее папы, мамы и младшего брата равен param1 годам (других детей в семье нет). Мама сказала, что пять лет назад суммарный возраст членов семьи был равен param2 годам. А папа добавил, что десять лет назад он был равен param3 годам. Определите, сколько лет сейчас Кате.

| param1 | param2 | param3 |
|---|---|---|
| 92 | 74 | 60 |
| 76 | 58 | 45 |
| 76 | 60 | 48 |
| 82 | 63 | 52 |
| 83 | 67 | 53 |