16.1

M5

Решение: Из теоремы Виета получаем $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c}{a}$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{b}{a}$. Нам требуется доказать равенство $b^2 = a^2 + 2ac$. Так как $a \neq 0$, то разделим это равенство на a^2. Нам нужно доказать равенство $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + 2\frac{c}{a}$. Получаем

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\frac{c}{a},$$

что и требовалось.

M6

Ответ: $HD = 2AH = 10$

Решение: Докажем, что $HD = 2AH$. Если a – длина стороны квадрата, а $AH = x$, то $HD = a - x$, и равенство $HD = 2AH$ равносильно $a - x = 2x$, то есть требуется доказать, что $AH = \frac{a}{3}$. Диагональ *AC* квадрата является диаметром окружности, поэтому $\angle CFA = 90°$. Кроме того, $\angle ABH = \angle ABF = \angle ACF$ – как вписанные углы, опирающиеся на общую дугу *AF*. Значит, треугольники *ABH* и *FCA* подобны и нужно доказать, что $CF : CA = AB : HB = a : \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = 3 : \sqrt{10}$. По теореме о пересекающихся хордах $CE \cdot EF = DE \cdot EA = \frac{a^2}{4}$. Но $CE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, поэтому $EF = \frac{a}{2\sqrt{5}}$. Значит, $CF = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$. Теперь из равенства $CA = a\sqrt{2}$ получаем, что $CF : FA = \frac{3a}{\sqrt{5}} : a\sqrt{2} = 3 : \sqrt{10}$. Утверждение доказано.