МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 1 ШИФР ________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(3^{x-1}\right)}\left(x^2-11x+19\right)+\log_{\left(27^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\frac{2}{x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+1|-2}}\le\frac{1}{9+x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3+4\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x.$$

4. Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin\frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN=11$, $BL=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2-36\right)\ge 0,\\ |x-2+y|+|x-2-y|\le a\,?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB=\arccos\frac{1}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 40°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 2 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(5^x\right)}\left(x^2+9x+15\right)+\log_{\left(125^x\right)}\left(x^3\right)=\frac{2}{x}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x-3|-1}}\le\frac{1}{6-x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1+7\sin^2 x}=2\cos x-\sqrt{3}\sin x.$$

4. Число 84605 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 84605846058460584605846058460584605. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки B, C и D, пересекает стороны AB и AD в точках T и E соответственно, причём $BT=10$, $AE=7$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+3y^2\right)\left(y^2-25\right)\ge 0,\\ |x+2+y|+|y+2-x|\le a?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 3 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(2^x\right)}\left(x^2-6x-15\right)+\log_{\left(8^x\right)}\left(x^3\right)=\frac{3}{x}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+2|-1}}\le\frac{1}{5+x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{6+\frac{22}{3}\sin^2 x}=3\cos x+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x.$$

4. Число 94850 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 94850948509485094850948509485094850. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ABC равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и C, пересекает стороны AD и CD в точках P и M соответственно, причём $AP=3$, $CM=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(2x^2+3xy+2y^2\right)\left(49-x^2\right)\le 0,\\ |x+3+y|+|x+3-y|\le a?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.
а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.
б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.
в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB=\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 30-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 30°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 4 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(5^{x-1}\right)}\left(x^2-7x+11\right)+\log_{\left(125^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\frac{1}{x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+3|-2}}\le\frac{1}{7+x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3+\frac{25}{2}\sin^2 x}=\sqrt{6}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x.$$

4. Число 83105 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 83105831058310583105831058310583105. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и D, пересекает стороны BC и CD в точках F и N соответственно, причём $BF=7$, $DN=1$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(2x^2+4xy+3y^2\right)\left(64-y^2\right)\le 0,\\ |x-3+y|+|y-3-x|\le a\,?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 36-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 5 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(6^{x-2}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(36^{x-2}\right)}\left((x-5)^4\right)=\frac{2}{x-2}.$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{7}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{27+\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}}>1.$$

4. Число 58964 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5896458964589645896458964589645896458964. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle BCD=90^\circ$. Точка M – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M, а $\cos\angle BMC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+y^2\right)\left(|x-y|-6\right)\geq 0,\\ x(x+2)+y(y-2)=a\,?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $CP:PC_1$, если $BN:NB_1=3:4$.

8. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

<u>БИЛЕТ 6</u> ШИФР ____________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(4^{x+4}\right)}\left(x^4\right)+\log_{\left(2^{x+4}\right)}\left((x+5)^2\right)=\frac{4}{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{38}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{37-\sin 3x}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}}>1.$$

4. Число 52168 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5216852168521685216852168521685216852168. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle ABC=90^\circ$. Точка M – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 4 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке M, а $\cos\angle MDC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(3x^2+3xy+2y^2\right)\left(|x+y|-8\right)\geq 0,\\ x(x-4)+y(y-2)=a\,?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $BN:NB_1$, если $CP:PC_1=3:25$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 7 ШИФР ____________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(3^{x-3}\right)}\left((x-4)^2\right)+\log_{\left(9^{x-3}\right)}\left(x^4\right)=\frac{2}{x-3}.$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{6}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{23+\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^{x+\sqrt{x^2-3}}>1.$$

4. Число 51746 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5174651746517465174651746517465174651746. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle ADC=90^\circ$. Точка K – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 3 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке K, а $\sin\angle KAD=\frac{1}{3}$. Найдите длины отрезков AB и CD, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(x^2-4xy+7y^2\right)\left(10-|x-y|\right)\le 0,\\ x(x-2)+y(y+6)=a\,?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $CP:PC_1$ и $BN:NB_1$, если $AK:KA_1=1:12$.

8. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 8 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(2^{x+1}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(4^{x+1}\right)}\left((x+3)^4\right)=\frac{2}{x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{29+\sin 3x}=\sqrt{30}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^{-x+\sqrt{x^2-2}}>1.$$

4. Число 96182 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 9618296182961829618296182961829618296182. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle BAD=90^\circ$. Точка K – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 6 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке K, а $\cos\angle KCB=\frac{1}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(2x^2-5xy+4y^2\right)\left(7-|x+y|\right)\le 0,\\ x(x-6)+y(y+4)=a\,?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $BN:NB_1$, если $CP:PC_1=1:27$.

8. Дан правильный 14-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)