МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ________________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{x^2-4x+5}} \le 1.$$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2 \le 6x-4y-13, \\ x^2+y^2-4a^2 \le 8y-10x+4a-40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью – A и B, с большей окружностью – C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB=\frac{24}{5}$, $AC=12$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[618222;\ 618252]$ могли получиться в результате вычитания?

6. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка M так, что центр сферы, описанной около пирамиды MAA_1B_1B, лежит в грани AA_1B_1B. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $MABC$, равен 5, а ребро основания призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды MAA_1B_1B к объёму призмы;

б) длину отрезка MC;

в) площадь полной поверхности призмы.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4y^2-15xy+14x^2+12y-24x=0, \\ \sqrt{x(12-7x+4y)+36}+\sqrt{x^2+8x+32}=6. \end{cases}$$

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\le a\le 700$, $1\le b\le 700$, сумма $a+b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a\ne b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ________________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3x+3}{3-\sqrt{x^2-2x+10}} \le 1 .$$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2 \le 2x-4y-5, \\ x^2+y^2-9a^2 \le 8y-14x-61+12a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные KL и MN. Их точки касания с меньшей окружностью – L и M, с большей окружностью – K и N. Известно, что $KN = \frac{64}{5}$, $MN = 8$. Найдите радиусы окружностей.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[429454;\ 429488]$ могли получиться в результате вычитания?

6. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды QAA_1C_1C к объёму призмы;

б) длину отрезка QB;

в) объём призмы.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 21x^2-13xy+2y^2+42x-14y=0, \\ \sqrt{x(7x-2y+14)+49}+\sqrt{x^2+5x+12}=7. \end{cases}$$

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \le a \le 600$, $1 \le b \le 600$, сумма $a+b$ делится на 8, а произведение ab делится на 3. (При $a \ne b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ________________________________
заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{x^2-2x+2}} \le 1 .$$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2 \le 4y-2x-5, \\ x^2+y^2-4a^2 \le 10x-12y+12a-52 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные PS и QT. Их точки касания с меньшей окружностью – S и T, с большей окружностью – P и Q. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $PQ = \frac{12\sqrt{6}}{5}$, $QT = 2\sqrt{6}$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[382340; 382371]$ могли получиться в результате вычитания?

6. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка S так, что центр сферы, описанной около пирамиды SAA_1B_1B, лежит в грани AA_1B_1B. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$, равен $\sqrt{2}$, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды SAA_1B_1B к объёму призмы;

б) длину отрезка SC;

в) площадь полной поверхности призмы.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-19xy+45y^2-12x+60y=0, \\ \sqrt{y(2x-9y-12)+36}+\sqrt{y^2-5y+11}=6. \end{cases}$$

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \le a \le 840$, $1 \le b \le 840$, сумма $a+b$ делится на 6, а произведение ab делится на 7. (При $a \ne b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ________________________________
заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2x+8}{8-\sqrt{x^2-2x+65}} \le 1.$$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \le 4y - 6x - 13, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \le 10x - 8y + 6a - 40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные CD и EF. Их точки касания с меньшей окружностью – D и E, с большей окружностью – C и F. Известно, что $DE = 8$, $EF = 20$. Найдите радиусы окружностей.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[584548; 584570]$ могли получиться в результате вычитания?

6. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка T так, что центр сферы, описанной около пирамиды TAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $TABC$, равен $\sqrt{19}$, а ребро основания призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите:
а) отношение объёма пирамиды TAA_1C_1C к объёму призмы;
б) длину отрезка TB;
в) объём призмы.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 + 10x + 20y = 0, \\ \sqrt{25 - y(3x+5y+10)} + \sqrt{y^2 - 10y + 30} = 5. \end{cases}$$

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \le a \le 1100$, $1 \le b \le 1100$, сумма $a+b$ делится на 4, а произведение ab делится на 11. (При $a \ne b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)-\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right)\le 2\cdot\log_4\left(x^2+5x+6\right).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{5x}{y}-\dfrac{9y}{x}+10=\dfrac{6}{xy},\\ \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+4=\dfrac{9}{xy}.\end{cases}$$

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\operatorname{ctg}6x-\operatorname{tg}5x=\frac{1}{\cos 5x},$$

принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{8\pi}{17};\dfrac{40\pi}{17}\right]$.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке E, а прямую BC – в точке F, причём $AE\perp CD$, $EF=4$. Найдите длины отрезков AE и AD, а также площадь трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+(2a-2)x+a^2-2a-3=0,\\ \sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-a)^2}=4\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[891870;\ 891899]$ могли получиться в результате сложения?

8. На клетчатой доске размера 22×25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ________________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x^2}{2}+8x+33\right) \le -\log_{1/4}\left(x^2+13x+42\right)+\log_4\left(\frac{x-1}{x+7}\right).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{y}+\dfrac{2y}{x}+1=8xy, \\ \dfrac{7x}{y}-\dfrac{y}{x}+6=12xy. \end{cases}$$

3. Рассматриваются всевозможные правильные треугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.
а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.
б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\operatorname{tg}12x+\operatorname{tg}7x=\frac{1}{\cos 7x},$$

принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{46\pi}{31};\dfrac{92\pi}{31}\right]$.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона CD равна 10. Биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке E, а прямую BC – в точке F, причём $DE \perp AB$, $BE=4$. Найдите длины отрезков DE и AD, а также площадь трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-(4a+2)x+4a^2+4a-3=0, \\ \sqrt{x^2+(y+2a)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+2a)^2}=4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[375355;\ 375380]$ могли получиться в результате сложения?

8. На клетчатой доске размера 31×19 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 5 и 7 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{1/7}\left(\frac{x-1}{x-9}\right) \le \log_{1/7}\left(\frac{x^2}{2}-10x+51\right)+2\cdot\log_{49}\left(x^2-17x+72\right).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{y}+\dfrac{4y}{x}+4=\dfrac{8}{xy}, \\ \dfrac{3x}{y}+\dfrac{2y}{x}+6=\dfrac{2}{xy}. \end{cases}$$

3. Рассматриваются всевозможные правильные шестиугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

4. Найдите наибольший корень уравнения

$$\operatorname{tg} 7x - \operatorname{tg} 10x = \frac{1}{\cos 7x},$$

принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{2\pi}{13}; \dfrac{46\pi}{13}\right]$.

5. Основание BC трапеции $ABCD$ равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает боковую сторону CD в точке M, а прямую BC – в точке K, причём $AK \perp CD$, $CM = 3$. Найдите длины отрезков AM и AD, а также площадь трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(2a+2)x+a^2+2a-3=0, \\ \sqrt{x^2+(y+a)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+a)^2}=4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[427411; 427434]$ могли получиться в результате сложения?

8. На клетчатой доске размера 28×24 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 9 и 5 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ (11 КЛАСС)

ШИФР ______________________________
заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{1/5}\left(\frac{x+3}{x-5}\right)+2\cdot\log_{25}\left(\frac{x^2}{2}-6x+19\right)\le\log_5\left(x^2-9x+20\right).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{6x}{y}+\dfrac{2y}{x}-5=4xy,\\ \dfrac{7x}{y}+\dfrac{4y}{x}-10=3xy.\end{cases}$$

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.
а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.
б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

4. Найдите наибольший корень уравнения

$$\operatorname{ctg}12x+\operatorname{tg}5x=\frac{1}{\cos 5x},$$

принадлежащий отрезку $\left[-\frac{47\pi}{19};-\frac{9\pi}{19}\right]$.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона CD равна 10. Биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке M, а прямую BC – в точке N, причём $DN\perp AM$, $MN=3$. Найдите длины отрезков DN и AD, а также площадь трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}y^2+(4a+2)y+4a^2+4a-3=0,\\ \sqrt{(x+2a)^2+y^2}+\sqrt{(x+2a)^2+(y-4)^2}=4\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[639619;\ 639647]$ могли получиться в результате сложения?

8. На клетчатой доске размера 34×27 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 3 и 11 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?