

ОЛИМПИАДА “ФИЗТЕХ” 2010 (математика)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC . Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC .

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 2x \cos 6x}{\cos x} = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{18-x}{2+x}} > -x.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(y+1) = 4 \log_{x+2} \sqrt{y-1}, \\ \log_{y-1}(x+2) = \log_x \left(\frac{x^3}{y+1} \right). \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 8. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 15. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC , касается рёбер SA , AB и AC в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1 , расстояние от точки O до ребра BC , и радиус сферы.