

## ОЛИМПИАДА “ФИЗТЕХ” 2010 (математика)

1. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  основание  $AC$  равно 1, угол  $ABC$  равен  $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ . Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  так, что площадь треугольника  $ABC$  вчетверо больше площади треугольника  $ADC$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до прямой  $AB$  и радиус окружности, описанной около треугольника  $ADC$ .

**Ответ:** расстояние =  $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ , радиус =  $\frac{\sqrt{265}}{32}$ .

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 2x \cos 6x}{\cos x} = 0.$$

**Ответ:**  $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{18-x}{2+x}} > -x.$$

**Ответ:**  $x \in (-2, 18]$ .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(y+1) = 4 \log_{x+2} \sqrt{y-1}, \\ \log_{y-1}(x+2) = \log_x \left( \frac{x^3}{y+1} \right). \end{cases}$$

**Ответ:**  $\left( \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2} \right), \left( \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right)$ .

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

**Ответ:**  $a = 2 + \sqrt{2}$ .

6. Основанием треугольной пирамиды  $SABC$  является правильный треугольник  $ABC$  со стороной 8. Боковое ребро  $SC$  перпендикулярно основанию и имеет длину 15. Сфера, центр  $O$  которой лежит в плоскости  $SBC$ , касается рёбер  $SA$ ,  $AB$  и  $AC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Найдите  $AA_1$ , расстояние от точки  $O$  до ребра  $BC$ , и радиус сферы.

Ответ:  $AA_1 = 6$ , расстояние =  $\frac{18}{5}$ , радиус =  $\frac{4\sqrt{39}}{5}$ .