Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ. Январь – февраль 2021г.
Решения. 11 класс. Физика

1. 1) $S=\frac{1}{2}at^2$. $a=\frac{2S}{t^2}=2$ м/с^2. 2) $V_1=\sqrt{2aS_1}=14$ м/с.

2.1. 1) $mV_0=4mV_2-mV_1$, $\frac{1}{2}mV_0^2=\frac{1}{2}\cdot 4mV_2^2+\frac{1}{2}mV_1^2$. Отсюда скорость покоившегося бруска $V_2=\frac{2}{5}V_0$, скорость двигавшегося бруска $V_1=\frac{3}{5}V_0$ - ответ.

2) $\mu mgS_1=\frac{1}{2}mV_1^2$, $\mu\cdot 4mgS_2=\frac{1}{2}\cdot 4mV_2^2$. Из записанных? уравнений с учетом выражений для скоростей находим расстояние $S=S_1+S_2=\frac{13}{50}\frac{V_0^2}{\mu g}$.

2.2. 1) $mV_0=5mV_2-mV_1$, $\frac{1}{2}mV_0^2=\frac{1}{2}\cdot 5mV_2^2+\frac{1}{2}mV_1^2$. Отсюда скорость покоившегося бруска $V_2=\frac{1}{3}V_0$ - ответ. Скорость двигавшегося бруска $V_1=\frac{2}{3}V_0$.

2) $\mu mgS_1=\frac{1}{2}mV_1^2$, $\mu\cdot 5mgS_2=\frac{1}{2}\cdot 5mV_2^2$. Из записанных уравнений с учетом выражений для скоростей находим расстояние $S=S_1+S_2=\frac{5}{18}\frac{V_0^2}{\mu g}$.

3.1. 1)Температуры в начале изобарного расширения T_0, в конце nT_0, в начале адиабатического сжатия $\frac{T_0}{n^{2/3}}$. В изобарическом процессе к одноатомному идеальному газу подводят количество теплоты $Q_H=\frac{5}{2}\nu RT_0(n-1)$, в изохорном процессе от этого газа отводят $Q_X=\frac{3}{2}\nu RT_0\left(n-n^{-2/3}\right)$. Тогда КПД цикла равен $\eta=1-\frac{Q_X}{Q_H}=1-\frac{3}{5}\cdot\frac{n-n^{-2/3}}{n-1}$. Подстановка $n=8$ в это равенство приводит к ответу на первый вопрос задачи: $\eta=\frac{47}{140}\approx 0,34$.

2) Для ответа на второй вопрос достаточно заметить, что последовательность $a_n=\frac{n-n^{-2/3}}{n-1}=1+\frac{1-n^{-2/3}}{n-1}$ стремится к единице сверху при $n\to\infty$. Тогда $\eta_{MAX}=1-0,6=0,4$.

3.2. 1) Расширение в процессе $\rho=\frac{\alpha}{T}$ изобарное, объем и температура увеличиваются в n раз. В начале адиабатического сжатия температура $\frac{T_0}{n^{2/3}}$. В изобарическом процессе к одноатомному идеальному газу подводят количество теплоты $Q_H=\nu\frac{5}{2}RT_0(n-1)$, в изохорном процессе от этого газа отводят $Q_X=\nu\frac{3}{2}RT_0\left(n-n^{-2/3}\right)$. На адиабате теплообмена нет. Работа газа за цикл

$$A=Q_H-Q_X=\frac{2n+3n^{-2/3}-5}{2}\nu RT_0\approx 8\cdot 10^3\text{ Дж}.$$

2) КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{n - n^{-2/3}}{n-1}$. Для ответа на второй вопрос достаточно заметить, что последовательность $a_n = \frac{n - n^{-2/3}}{n-1} = 1 + \frac{1 - n^{-2/3}}{n-1}$ стремится к единице сверху при $n \to \infty$. Тогда $\eta_{MAX} = 1 - 0,6 = 0,4$.

4. 1) Отношение плотностей пара $\rho_2 / \rho_1 = 3$. Плотность пара увеличилась в 3 раза.

2) $P_{2H} = 10^5$ Па. $P_{1H}\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\mu} RT_1, P_{2H}\varphi_2 = \frac{\rho_2}{\mu} RT_2$. Отсюда $\varphi_2 = \frac{P_{1H} T_2 \rho_2}{P_{2H} T_1 \rho_1} \varphi_1 = \frac{3 P_{1H} T_2}{P_{2H} T_1} \varphi_1 \approx 6\%$.

5. 1) Скорость роста энергии конденсатора $\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{2C} \frac{\Delta\left(q^2\right)}{\Delta t} = I_C \cdot U_C$, мощность тепловыделения на резисторе $P = I_R \cdot U_R$. Эти элементы соединены параллельно, поэтому, $U_R = U_C$. Тогда в рассматриваемый момент времени $I_R = I_C$. Далее, по второму правилу Кирхгофа $E = I_R R + 2 I_R r$. Отсюда $I_R = \frac{E}{2r + R}$. Мощность сторонних сил в источнике $P = 2 I_R E = \frac{2E^2}{2r + R}$.

2) В любой момент времени по второму правилу Кирхгофа $E = I_R R + \left(I_R + I_C\right) r$, отсюда $I_C = \frac{E - \left(R + r\right) I_R}{r}$. Тогда скорость роста энергии конденсатора $\frac{\Delta W}{\Delta t} = I_C U_C = I_C U_R = \frac{R \cdot (R + r)}{r} \left(\frac{E}{R + r} - I_R \right) I_R$. Максимум этой «перевернутой параболы» достигается при $I_R = \frac{E}{2\left(r + R\right)}$. В этот момент в электрическом поле конденсатора запасена энергия $Q = \frac{C U_R^2}{2} = \frac{C}{2}\left(I_R R\right)^2 = \frac{C E^2}{8} \left(\frac{R}{r + R} \right)^2$. По закону сохранения энергии ровно столько теплоты выделится на резисторе после размыкания ключа.

6.1. 1) $I_0 = \frac{E}{R + r}$.

2) При $I_R = \frac{1}{2} I_E$ по второму правилу Кирхгофа $E = I_R R + I_E r$. Отсюда $I_R = \frac{E}{R + 2r}$. Так как катушка и резистор R соединены параллельно, то $L I_L' = I_R R$. Скорость возрастания тока $I_L' = \frac{I_R R}{L} = \frac{ER}{L\left(R + 2r\right)}$.

6.2. 1) $I_0 = \frac{E}{R + r}$.

2) При $I_R = \frac{1}{3} I_E$ по второму правилу Кирхгофа $E = I_R R + I_E r$. Отсюда $I_R = \frac{E}{R + 3r}$. Так как катушка и резистор R соединены параллельно, то $L I_L' = I_R R$. Скорость возрастания тока $I_L' = \frac{I_R R}{L} = \frac{ER}{L\left(R + 3r\right)}$.

7.1. 1) $I_0 = \frac{E}{r}$.

2) Сразу после замыкания ключа ток через катушку останется $I_0 = \frac{E}{r}$. Пусть сразу после замыкания: I_1 - ток через r и направлен вверх, I_R - ток через R и направлен вниз, I_2 - ток через $3r$ и направлен вверх. По правилам Кирхгофа

$$E = I_R R + I_1 r, \quad 2E = I_R R + I_2 3r, \quad I_1 + I_2 = I_R + I_0 .$$

Отсюда, с учетом выражения для $I_0 = \frac{E}{r}$, находим $I_R = \frac{2E}{4R+3r}$.

7.2. 1) $I_0 = \frac{E}{r}$.

2) Сразу после замыкания ключа ток через катушку останется $I_0 = \frac{E}{r}$. Пусть сразу после замыкания: I_1 - ток через *r* и направлен вверх, I_R - ток через *R* и направлен вниз, I_2 - ток через 2*r* и направлен вверх. По правилам Кирхгофа

$$E = I_R R + I_1 r, \quad 3E = I_R R + I_2 2r, \quad I_1 + I_2 = I_R + I_0 .$$

Отсюда, с учетом выражения для $I_0 = \frac{E}{r}$, находим $I_R = \frac{3E}{3R+2r}$.

8.1. 1) При гармонических колебаниях с циклической частотой ω амплитудные значения скорости и ускорения $V_M = \omega A, \quad a_M = \omega^2 A$. Отсюда $a_M = \frac{V_M^2}{A} \approx 26$ м/с^2.

2) Для доски $\mu(8m)g \geq m a_M$. С учетом выражения для a_M, находим $\mu \geq \frac{V_M^2}{8gA} = 0,32$.

8.2. 1) При гармонических колебаниях с циклической частотой ω справедливо $V_M = \omega A, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$. Отсюда $T = \frac{2\pi A}{V_M} \approx 0,63\,\text{c}$.

2) Для доски $\mu(10m)g \geq m a_M$. Амплитудные значения скорости и ускорения $V_M = \omega A, \quad a_M = \omega^2 A$. Отсюда $\mu \geq \frac{V_M^2}{10gA} = 0,2$.