

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

9 класс

Задача 1. Положительные числа a и b таковы, что уравнения

$$x^2 + ax - 100 = 0 \text{ и } x^2 - 200x + b = 0$$

имеют общий положительный корень, больший 1. Докажите, что $b - a > 100$.

Решение. Пусть $t > 1$ — общий корень уравнений, тогда $t^2 + at - 100 = 0$ и $t^2 - 200t + b = 0$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $(a + 200)t - 100 - b = 0$. Следовательно, $b + 100 = (a + 200)t > a + 200$, поэтому $b - a > 100$. \square

Задача 2. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N , которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Задача 4. В каждую клетку таблицы 7×7 вписали одно из пяти целых чисел: $-2, -1, 0, 1, 2$ так, что сумма чисел во всей таблице равна 0. Докажите, что найдётся квадрат 3×3 , в котором модуль суммы всех девяти чисел не превосходит 6.

Задача 5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки P и Q — середины отрезков AC и BD соответственно. На отрезках OA, OB, OC, OD отмечены точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно так, что $AA_1 = CC_1, BB_1 = DD_1$.

- Описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 пересекаются в точках K и O .
- Описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 пересекаются в точках M и O .

Докажите, что точки K, M, P, Q лежат на одной окружности.