Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

10 класс

Задача 1. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Задача 2. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, точка O — центр его описанной окружности. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке N. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно такие, что $OX \parallel AN$ и $OY \parallel CN$. Описанная окружность треугольника XBY пересекает отрезок BH в точке Z. Докажите, что $XY \parallel OZ$.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Задача 4. Покупатель пришёл в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

Задача 5. Действительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z = 2$ и $xy + yz + zx = 1$. Найдите наибольшее возможное значение величины $x - y$.