Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

9 класс

Задача 1. Положительные числа a и b таковы, что уравнения

$$x^2 + ax - 100 = 0 \text{ и } x^2 - 200x + b = 0$$

имеют общий положительный корень, больший 1. Докажите, что $b - a > 100$.

Решение. Пусть $t > 1$ — общий корень уравнений, тогда $t^2 + at - 100 = 0$ и $t^2 - 200t + b = 0$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $(a + 200)t - 100 - b = 0$. Следовательно, $b + 100 = (a + 200)t > a + 200$, поэтому $b - a > 100$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Из одного равенства вычитается другое, но дальнейших продвижений нет.

Задача 2. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Ответ: 30.

Решение. Рассмотрим любую четвёрку подряд идущих людей. Если бы в ней было хотя бы 3 рыцаря, то самый левый из рыцарей точно сказал бы неправду, что невозможно. Если бы в ней было хотя бы 3 лжеца, то самый левый из лжецов точно сказал бы правду, что тоже невозможно. Значит, в каждой четвёрке подряд идущих людей ровно 2 рыцаря и ровно 2 лжеца. Разбив всех людей на 15 таких четвёрок, получаем, что рыцарей $15 \cdot 2 = 30$.

Другое решение. Заметим, что за столом не могут сидеть только рыцари или только лжецы. Тогда найдётся пара рыцарь-лжец, сидящая рядом именно в таком порядке. Рассмотрим 4 случая, кто может сидеть справа от этой пары.

Случай 1. Справа сидят два рыцаря.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-рыцарь-рыцарь,

что противоречит условию, так как первый рыцарь соврал.

Случай 2. Справа сидят два лжеца.
Тогда получается последовательность

$$\text{рыцарь-лжец-лжец-лжец.}$$

Кто бы ни сидел сразу после этой последовательности, первый лжец скажет правду, что противоречит условию.

Случай 3. Справа сидят рыцарь-лжец именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

$$\text{рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.}$$

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

$$\text{рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь.}$$

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым человеком в последовательности будет лжец:

$$\text{рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.}$$

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается чередующаяся расстановка, где рыцарей и лжецов поровну.

Случай 4. Справа сидят лжец-рыцарь именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

$$\text{рыцарь-лжец-лжец-рыцарь.}$$

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

$$\text{рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь.}$$

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым и седьмым человеком в последовательности будут лжецы

$$\text{рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь-лжец-лжец.}$$

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается расстановка, где рыцарей и лжецов поровну. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 7 б. Задача верно решена для случая, когда за столом присутствуют и рыцари, и лжецы.
- 4 б. В решении рассматриваются оба возможных случая расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.

2 б. В решении рассматривается один из двух возможных случаев расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.

1 б. Присутствует только верный ответ.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа $150!$, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 4. В каждую клетку таблицы 7×7 вписали одно из пяти целых чисел: $-2, -1, 0, 1, 2$ так, что сумма чисел во всей таблице равна 0. Докажите, что найдётся квадрат 3×3, в котором модуль суммы всех девяти чисел не превосходит 6.

Решение. Рассмотрим два квадрата 3×3, пересекающихся по прямоугольнику 2×3. Пусть в клетках этих квадратов стоят числа $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

Пусть

$S_1 = |a+b+c+e+f+g+i+j+k|$ — модуль суммы всех чисел в первом квадрате,

а $S_2 = |b+c+d+f+g+h+j+k+l|$ — модуль суммы всех чисел во втором квадрате. Тогда

$$\Big|S_1 - S_2\Big| = \Big||a+b+c+e+f+g+i+j+k| - |b+c+d+f+g+h+j+k+l|\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|(a+b+c+e+f+g+i+j+k) - (b+c+d+f+g+h+j+k+l)\Big| =$$

$$= \Big|(a+e+i) - (d+h+l)\Big| \leqslant 12.$$

Таким образом, модули сумм чисел в двух таких пересекающихся квадратах отличаются не более чем на 12.

Вернёмся к задаче. Предположим, что нет квадрата 3×3, в котором модуль суммы чисел не более 6. Тогда в любом таком квадрате сумма чисел не меньше 7 или не больше -7.

Покажем, что если суммы чисел во всех квадратах 3×3 не меньше 7 или не больше -7, то существуют квадраты и с положительной суммой, и с отрицательной. Предположим, например, что суммы во всех квадратах 3×3 положительны. Рассмотрим 4 угловых квадрата 3×3, в них общая сумма чисел не меньше $7 \cdot 4 = 28$. Кроме них остались 13 клеток, числа в которых не меньше -2, поэтому сумма чисел во всём квадрате 7×7 больше 0, противоречие.

Рассмотрим теперь какой-нибудь квадрат с положительной суммой чисел и начнём его постепенно сдвигать (на одну клетку по горизонтали или на одну клетку по вертикали), пока он не совпадёт с квадратом с отрицательной суммой. В этом «пути», по доказанному выше, каждый раз сумма чисел будет меняться не более чем на 12. Поскольку сначала она не меньше 7, а в конце она не больше -7, то в каком-то из промежуточных квадратов 3×3 сумма принимает значение от -6 до 6. Противоречие. $\square$

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

Снижаются баллы за следующие недочёты в решении, аналогичном авторскому, если оно в остальном верно:

-1 б. Нет обоснования, что модули сумм чисел в двух пересекающихся квадратах отличаются не более чем на 12.

-2 б. Нет обоснования, что существует квадрат 3×3 как с положительной, так и с отрицательной суммой чисел.

Задача 5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки P и Q — середины отрезков AC и BD соответственно. На отрезках OA, OB, OC, OD отмечены точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно так, что $AA_1 = CC_1$, $BB_1 = DD_1$.

- Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точках K и O.
- Описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 пересекаются в точках M и O.

Докажите, что точки K, M, P, Q лежат на одной окружности.

Решение. Докажем, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.

Заметим, что треугольники AKC и BKD подобны. Действительно, $\angle OCK = \angle ODK$, поскольку точки O, C, D, K лежат на одной окружности, а $\angle OBK = \angle OAK$, поскольку точки O, B, A, K лежат на одной окружности.

У подобных фигур соответствующие элементы подобны, поэтому треугольники APK и BQK подобны.

Если точка P лежит на отрезке OA, а точка Q лежит на отрезке OD, то

$$\angle OPK + \angle OQK = (180^\circ - \angle APK) + \angle BQK = 180^\circ.$$

Случаи, когда P лежит на отрезке OC и/или Q лежит на отрезке OB, рассматриваются аналогично. Во всех них углы $\angle OPK$ и $\angle OQK$ либо равны, если точки P и Q расположены по одну сторону от прямой OK, либо в сумме дают 180°, если точки P и Q расположены по разные стороны от прямой OK.

Итак, утверждение доказано. Остаётся лишь понять, что точки O, M, P, Q лежат на одной окружности по аналогичной причине (для этого достаточно повторить такое же рассуждение для четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, у которого P и Q — середины диагоналей, а O — точка пересечения диагоналей). Следовательно, все пять точек O, K, M, P, Q лежат на одной окружности. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 5 б. Доказано, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.
- 5 б. Доказано, что точки O, M, P, Q лежат на одной окружности.
- 2 б. Доказано подобие треугольников AKC и BKD или аналогичных им.
- 2 б. Доказано подобие треугольников A_1MC_1 и B_1MD_1 или аналогичных им.