Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

8 класс

Задача 1. В 20 ящиков разложили 60 чёрных и 60 белых шариков — по 6 шариков в каждый. Ваня заметил, что в каждом из первых 14 ящиков чёрных шариков оказалось больше, чем белых. Верно ли, что среди последних 6 ящиков точно найдётся такой, в котором все шарики белые?

Ответ: да, верно.

Решение. Из условия следует, что в каждом из первых 14 ящиков есть хотя бы 4 чёрных шарика. Поэтому всего в первых 14 ящиках хотя бы $14 \cdot 4 = 56$ чёрных шариков. Если бы в каждом из оставшихся 6 ящиков было хотя бы по одному чёрному шарику, то всего чёрных шариков оказалось бы хотя бы $56 + 6 = 62 > 60$, противоречие. Значит, среди оставшихся 6 ящиков точно найдётся такой, в котором все шарики белые. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

0 б. Приведены один или несколько возможных случаев разложения шариков по ящикам, но не доказано, что искомый ящик найдётся всегда.

0 б. Только верный ответ.

Задача 2. Гоша ввёл в калькулятор натуральное число. Затем он 3 раза совершил следующую операцию из двух действий: сначала извлёк квадратный корень, а затем у полученного числа взял целую часть. В итоге у него получилось число 1. Какое наибольшее число мог изначально ввести Гоша?

Напомним, целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

Ответ: 255.

Решение. Предположим, он ввёл число, не меньшее 256. Тогда после первого действия у него получилось число не меньше $[\sqrt{256}] = 16$, после второго — не меньше $[\sqrt{16}] = 4$, после третьего — не меньше $[\sqrt{4}] = 2$, противоречие.

Пусть Гоша ввёл число 255. Тогда после первого действия у него получилось $[\sqrt{255}] = 15$, после второго — $[\sqrt{15}] = 3$, после третьего — $[\sqrt{3}] = 1$. Следовательно, ответом к задаче является число 255. □

Критерии

Следующие критерии суммируются:

4 б. Доказано, что число Гоши не больше 255.

3 б. Доказано, что число 255 удовлетворяет условию задачи.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа 150!, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 4. Дан треугольник ABC такой, что $\angle BAC = 2\angle BCA$. Точка L на стороне BC такова, что $\angle BAL = \angle CAL$. Точка M — середина стороны AC. Точка H на отрезке AL такова, что $MH \perp AL$. На стороне BC нашлась точка K такая, что треугольник KMH — равносторонний. Докажите, что точки B, H и M лежат на одной прямой.

Решение. Из условия следует, что $\angle BAL = \angle CAL = \angle BCA$. Следовательно, треугольник CAL — равнобедренный с основанием AC, и его медиана LM является осью симметрии этого треугольника (а также высотой и биссектрисой).

Пусть точка H при симметрии относительно прямой LM переходит в некоторую точку H_1, лежащую на LC, при этом $MH = MH_1$ и $\angle MH_1C = \angle MHA = 90^\circ$. По условию треугольник KMH — равносторонний, поэтому $MK = MH = MH_1$ (и равно расстоянию от точки M до прямой LC). Из равенства $MH_1 = MK$ следует, что точки K и H_1 совпадают. Отсюда получаем, что

$$\angle LMH = \frac{1}{2}\angle HMK = 30^\circ, \qquad \angle ALM = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\angle BCA = \angle LCA = \angle LAM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\angle BAC = 2\angle LAC = 60^\circ, \qquad \angle ABC = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

Следовательно, BM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе, поэтому $BM = AM$. Поскольку $\angle BAM = 60^\circ$, треугольник ABM — равносторонний. Поскольку AL — биссектриса равностороннего треугольника BAM, то $AL \perp BM$. Наконец, в силу того, что $AL \perp MH$, следует, что точки B, H, M лежат на одной прямой. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что углы треугольника ABC равны $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Доказано, что $MK \perp BC$, но дальнейших продвижений нет.

Задача 5. Покупатель пришёл в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

Ответ: да, может.

Решение. Приведём стратегию покупателя. Первым ходом спросим торговца про две любые монеты. Следующими действиями всегда будем спрашивать про ту из двух монет, указанных на предыдущем ходу, что осталась на столе, и ещё про любую из ранее не задействованных монет.

Покажем, по какому правилу нужно убирать монеты со стола. Будем за покупателя вести подсчёт количества убранных монет двух разных типов (не зная, какой из типов настоящий, а какой фальшивый). Так как каждым действием мы сравниваем тип одной новой монеты и одной старой, покупатель безошибочно определит, к первому или второму типу относится новая монета. Если типы двух монет, про которые текущим действием спрашивал покупатель, различны, то он будет убирать монету того типа, монет которого на данный момент убрано не больше, чем другого (другими словами, будет стремиться «уравнивать» количество убранных монет разных типов). Если же выбранные монеты одного типа, то покупатель убирает любую из двух монет.

Докажем от противного, что в результате таких действий последняя оставшаяся монета будет настоящей. Рассмотрим первое действие покупателя, после которого на столе не осталось настоящих монет. Этим действием покупатель убрал последнюю настоящую монету M. Так как M — последняя настоящая монета, то другая монета N, на которую указывал покупатель, фальшивая. На данный момент монет того же типа, что монета M, убрано строго больше, чем монет того же типа, что монета N (поскольку всего настоящих монет больше, чем фальшивых). Значит, согласно стратегии, покупатель должен был убрать монету N, а не M, противоречие. Таким образом, на столе всегда будут настоящие монеты, и поэтому последняя оставшаяся монета — настоящая. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Приведена верная стратегия, но не доказано, почему она гарантирует настоящую монету в конце.

0 б. Есть только верный ответ.