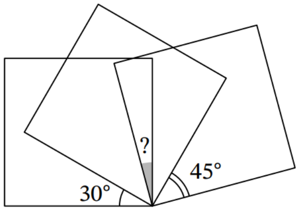
Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

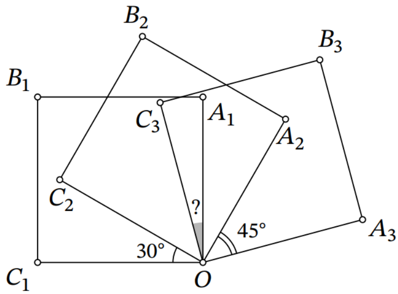
7 класс

Задача 1. На рисунке изображены три квадрата. Найдите отмеченный угол, если известны два других угла на рисунке.



Ответ: 15°.

Решение.



Заметим, что искомый угол равен

$$\angle C_1OA_1 + \angle C_3OA_3 - \angle C_1OA_3 = 90^\circ + 90^\circ - \angle C_1OA_3 = 180^\circ - \angle C_1OA_3.$$

Теперь найдём угол C_1OA_3:

$$\angle C_1OA_3 = \angle C_1OC_2 + \angle C_2OA_2 + \angle A_2OA_3 = 30^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 165^\circ.$$

Теперь мы можем найти ответ:

$$\angle C_3OA_1 = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ.$$

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 4 б. Найден угол C_1OA_3, но других продвижений нет.
- 4 б. Получена формула $\angle C_3OA_1 = 180^\circ - C_1OA_3$, но других продвижений нет.
- 1 б. Есть только верный ответ.

Задача 2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «Мой сосед слева — лжец» или «Мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?

Ответ: 10.

Решение. Рядом с каждым лжецом должен сидеть хотя бы один рыцарь (иначе, если с обеих сторон от лжеца сидят лжецы, то сказанная им фраза точно оказалась бы правдой). Следовательно, среди любых трёх подряд сидящих жителей есть хотя бы один рыцарь. Если разбить всех собравшихся за столом на группы из трёх подряд сидящих жителей, получим, что в каждой из них есть хотя бы один рыцарь, поэтому всего рыцарей хотя бы 10.

Приведём пример, когда рыцарей ровно 10. Пусть жители сидят так: рыцарь, два лжеца, рыцарь, два лжеца и т. д. Каждый из рыцарей говорит любую из приведённых фраз — она в любом случае окажется истинной. Лжец говорит: «Мой сосед слева — лжец», если слева от него рыцарь, и наоборот, он говорит: «Мой сосед справа — лжец», если справа от него рыцарь. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Критерии

Следующие критерии суммируются:

- 5 б. Доказано, что рыцарей хотя бы 10.
- 2 б. Доказано, что рыцарей может быть ровно 10.

Задача 3. В некоторой компании 100 акционеров, причём любые 66 из них суммарно владеют хотя бы 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер? (Количество процентов акций компании, принадлежащих акционеру, может быть нецелым.)

Ответ: 25%.

Решение. Рассмотрим любого акционера A. Остальных 99 акционеров разделим на три группы B, C, D по 33 акционера. По условию у B и C суммарно хотя бы 50% акций компании, аналогично у C и D, а также у B и D. Сложив всё это и поделив пополам, получаем, что суммарно у B, C, D хотя бы $((50+50+50):2)\% = 75\%$ акций, поэтому у A — оставшиеся не более чем 25% акций.

При этом у A может быть ровно 25% акций, если у всех остальных акционеров акций поровну, по $\frac{75}{99}\% = \frac{25}{33}\%$. Ясно, что в этом случае у любых 66 акционеров компании суммарно хотя бы $66 \cdot \frac{25}{33}\% = 50\%$ акций. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

Следующие критерии суммируются:

5 б. Доказано, что у любого акционера не более 25% акций.

2 б. Доказано, что у какого-то акционера может быть ровно 25% акций.

Задача 4. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа 150!, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 5. В треугольнике ABC угол при вершине B равен $120°$, точка M — середина стороны AC. На сторонах AB и BC выбраны точки E и F соответственно так, что $AE = EF = FC$. Найдите $\angle EMF$.

Ответ: $90°$.

Решение. Заметим, что сумма углов A и C равна $60°$. Пусть $AE = EF = FC = u$.

Отложим на прямой EM точку G такую, чтобы точка M была серединой отрезка EG. Треугольники AME и CMG равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle MCG = \angle MAE = \angle A$ и $CG = AE = u$.

Заметим, что $\angle FCG = \angle FCM + \angle MCG = \angle C + \angle A = 60°$.
Поскольку $FC = u = CG$, то треугольник FCG — равносторонний, и $FG = u$. Следовательно, треугольник EFG — равнобедренный, $EF = FG = u$. Его медиана FM является также и высотой, поэтому $\angle EMF = 90°$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Рассматривается точка, симметричная E или G относительно M, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Есть только верный ответ.