Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

6 класс

Задача 1. У Деда Мороза было 120 шоколадных конфет и 200 мармеладных. На утреннике он раздавал детям конфеты: каждому досталось по одной шоколадной и одной мармеладной конфете. Пересчитывая конфеты после утренника, Дед Мороз выяснил, что мармеладных конфет осталось в 3 раза больше, чем шоколадных. Сколько детей было на утреннике?

Ответ: 80.

Решение. Пусть всего было x детей, тогда после утренника у Деда Мороза осталось $120 - x$ шоколадных конфет и $200 - x$ мармеладных. Поскольку мармеладных конфет осталось в 3 раза больше, чем шоколадных, получаем уравнение $3 \cdot (120 - x) = 200 - x$. Решая его, получаем $x = 80$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть верный ответ с проверкой, что он подходит, но не доказано, что других ответов нет.

Задача 2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «Мой сосед слева — лжец» или «Мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?

Ответ: 10.

Решение. Рядом с каждым лжецом должен сидеть хотя бы один рыцарь (иначе, если с обеих сторон от лжеца сидят лжецы, то сказанная им фраза точно оказалась бы правдой). Следовательно, среди любых трёх подряд сидящих жителей есть хотя бы один рыцарь. Если разбить всех собравшихся за столом на группы из трёх подряд сидящих жителей, получим, что в каждой из них есть хотя бы один рыцарь, поэтому всего рыцарей хотя бы 10.

Приведём пример, когда рыцарей ровно 10. Пусть жители сидят так: рыцарь, два лжеца, рыцарь, два лжеца и т. д. Каждый из рыцарей говорит любую из приведённых фраз — она в любом случае окажется истинной. Лжец говорит: «Мой сосед слева — лжец», если слева от него рыцарь, и наоборот, он говорит: «Мой сосед справа — лжец», если справа от него рыцарь. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Критерии

Следующие критерии суммируются:

5 б. Доказано, что рыцарей хотя бы 10.

2 б. Доказано, что рыцарей может быть ровно 10.

Задача 3. На доске по кругу записаны 5 различных натуральных чисел. Каждое из них Петя поделил на следующее за ним по часовой стрелке, а затем 5 полученных чисел (не обязательно целых) выписал себе на бумажку. Может ли сумма 5 чисел на бумажке оказаться целым числом?

Ответ: да, может.

Решение. Например, для чисел 1, 2, 4, 8, 16 после деления получится сумма $1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 16 = 18$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

0 б. Есть только верный ответ, но верный пример не приведён.

Задача 4. У Карлсона есть три коробки, в каждой из которых лежит по 10 конфет. На одной коробке написано число 4, на другой — 7, на третьей — 10.

За одну операцию Карлсон последовательно делает два следующих действия:

- берёт из любой коробки количество конфет, равное числу, написанному на ней;
- из взятых конфет 3 съедает, а остальные кладёт в любую другую коробку.

Какое наибольшее количество конфет может съесть Карлсон в результате нескольких таких операций?

Ответ: 27.

Решение. Так как на каждом шагу Карлсон съедает 3 конфеты, общее количество съеденных конфет делится на 3. Докажем, что оно не превосходит 27, для этого достаточно показать, что оно не может равняться 30, то есть что Карлсон не может съесть все конфеты. В самом деле, если бы это было возможно, то перед последней операцией оставалось бы ровно 3 конфеты, то есть в каждой коробке было бы не более 3 конфет. Но каждое из чисел 4, 7, 10 больше 3, поэтому последнюю операцию сделать невозможно, противоречие.

Приведённый ниже пример показывает, как мог действовать Карлсон, чтобы съесть в точности 27 конфет. В k-й строчке написано, сколько конфет остаётся в каждой коробке после $(k-1)$-й операции. Три числа в каждой строчке — это количество конфет, остававшихся в коробках на соответствующем шаге. Запись (a, b, c) означает, что в коробке с номером 4 оставалось a конфет, в коробке с номером 7 — b конфет, в коробке с номером 10 — c конфет.

1. (10, 10, 10).
2. (10, 17, 0).
3. (14, 10, 0).
4. (18, 3, 0).
5. (14, 4, 0).
6. (10, 5, 0).
7. (6, 6, 0).
8. (2, 7, 0).
9. (6, 0, 0).
10. (2, 1, 0).

$\square$

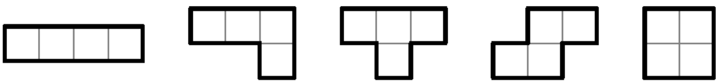
Критерии

Следующие критерии суммируются:

4 б. Доказано, что Карлсон съел не более 27 конфет.

3 б. Доказано, что Карлсон мог съесть ровно 27 конфет.

Задача 5. Клетчатый прямоугольник 42×44 разрезали по линиям сетки на прямоугольники 1×8, один квадрат 2×2 и одну тетраминошку. Докажите, что эта тетраминошка тоже является квадратом. (Все возможные тетраминошки изображены на рисунке ниже, их можно поворачивать и переворачивать.)



Решение. Предположим, что оставшаяся тетраминошка не является квадратом. Тогда существует ряд (горизонталь или вертикаль), пересекающий эту тетраминошку ровно по одной клетке. Покрасим теперь в чёрный цвет весь этот ряд, а также все ряды, удалённые от него на расстояние, кратное четырём (например, если выбрана 11-я горизонталь, то в чёрный цвет красятся горизонтали с номерами 3, 7, 11, 15 и т. д.). Остальные клетки покрасим в белый цвет. Поскольку в каждом чёрном ряду чётное количество чёрных клеток, то и во всём прямоугольнике 42×44 чётное количество чёрных клеток.

Заметим, что каждый из прямоугольников 1×8 содержит чётное количество чёрных клеток (0, 2 или 8). Каждый квадрат 2×2 тоже содержит чётное количество чёрных клеток (0 или 2). Вместе с единственной чёрной клеткой в оставшейся тетраминошке получаем нечётное количество чёрных клеток. Однако всего в прямоугольнике 42×44 чётное количество чёрных клеток, противоречие. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

0 б. Приведены одно или несколько возможных разрезаний, в которых тетраминошка является квадратом, но не доказано, что эта тетраминошка не может быть не квадратом.