Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

10 класс

Задача 1. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Ответ: 30.

Решение. Рассмотрим произвольную четвёрку подряд идущих людей. Если бы в ней было хотя бы 3 рыцаря, то самый левый из них точно сказал бы неправду, что невозможно. Если бы в ней было хотя бы 3 лжеца, то самый левый из них точно сказал бы правду, что тоже невозможно. Следовательно, в каждой четвёрке подряд идущих людей ровно 2 рыцаря и ровно 2 лжеца. Разбив всех людей на 15 таких четвёрок, получаем, что рыцарей $15 \cdot 2 = 30$.

Другое решение. Заметим, что за столом не могут сидеть только рыцари или только лжецы. Тогда найдётся пара рыцарь-лжец, сидящая рядом именно в таком порядке. Рассмотрим 4 случая, кто может сидеть справа от этой пары.

Случай 1. Справа сидят два рыцаря.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-рыцарь-рыцарь,

что противоречит условию, так как первый рыцарь соврал.

Случай 2. Справа сидят два лжеца.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-лжец-лжец.

Кто бы ни сидел сразу после этой последовательности, первый лжец скажет правду, что противоречит условию.

Случай 3. Справа сидят рыцарь-лжец именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь.

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым человеком в последовательности будет лжец:

$$\text{рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.}$$

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается чередующаяся расстановка, где рыцарей и лжецов поровну.

Случай 4. Справа сидят лжец-рыцарь именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

$$\text{рыцарь-лжец-лжец-рыцарь.}$$

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

$$\text{рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь.}$$

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым и седьмым человеком в последовательности будут лжецы

$$\text{рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь-лжец-лжец.}$$

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается расстановка, где рыцарей и лжецов поровну. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 7 б. Задача верно решена для случая, когда за столом присутствуют и рыцари, и лжецы.
- 4 б. В решении рассматриваются оба возможных случая расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.
- 2 б. В решении рассматривается один из двух возможных случаев расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.
- 1 б. Присутствует только верный ответ.

Задача 2. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, точка O — центр его описанной окружности. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке N. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно такие, что $OX \parallel AN$ и $OY \parallel CN$. Описанная окружность треугольника XBY пересекает отрезок BH в точке Z. Докажите, что $XY \parallel OZ$.

Решение. Так как $OX \parallel AN$ и $OY \parallel CN$, имеем $\angle XOY = \angle ANC$. Таким образом,

$$180^\circ = \angle ABC + \angle ANC = \angle XBY + \angle XOY,$$

то есть пять точек O, X, B, Y, Z лежат на одной окружности.

С одной стороны,

$$\angle YOZ = \angle YBZ = 90^\circ - \angle ACB.$$

С другой стороны,

$$\angle XYO = \angle XBO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle ACB = \angle YOZ,$$

откуда и следует, что $XY \parallel OZ$. □

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении не доказано, что $\angle ABO = \angle HBC$.

Следующие критерии суммируются:

3 б. Доказано, что пять точек O, X, B, Y, Z лежат на одной окружности.

1 б. Сформулировано, что $\angle ABO = \angle HBC$.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа 150!, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 4. Покупатель пришёл в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

Ответ: да, может.

Решение. Приведём стратегию покупателя. Первым ходом спросим торговца про две любые монеты. Следующими действиями всегда будем спрашивать про ту из двух монет, указанных на предыдущем ходу, что осталась на столе, и ещё про любую из ранее не задействованных монет.

Покажем, по какому правилу нужно убирать монеты со стола. Будем за покупателя вести подсчёт количества убранных монет двух разных типов (не зная, какой из типов настоящий, а какой фальшивый). Так как каждым действием мы сравниваем тип одной новой монеты и одной старой, покупатель безошибочно определит, к первому или второму типу относится новая монета. Если типы двух монет, про которые текущим действием спрашивал покупатель, различны, то он будет убирать монету того типа, монет которого на данный момент убрано не больше, чем другого (другими словами, будет стремиться «уравнивать» количество убранных монет разных типов). Если же выбранные монеты одного типа, то покупатель убирает любую из двух монет.

Докажем от противного, что в результате таких действий последняя оставшаяся монета будет настоящей. Рассмотрим первое действие покупателя, после которого на столе не осталось настоящих монет. Этим действием покупатель убрал последнюю настоящую монету M. Так как M — последняя настоящая монета, то другая монета N, на которую указывал покупатель, фальшивая. На данный момент монет того же типа, что монета M, убрано строго больше, чем монет того же типа, что монета N (поскольку всего настоящих монет больше, чем фальшивых). Значит, согласно стратегии, покупатель должен был убрать монету N, а не M, противоречие. Таким образом, на столе всегда будут настоящие монеты, и поэтому последняя оставшаяся монета — настоящая. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Приведена верная стратегия, но не доказано, почему она гарантирует настоящую монету в конце.

0 б. Есть только верный ответ.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть только верный ответ.

Задача 5. Действительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z = 2$ и $xy + yz + zx = 1$. Найдите наибольшее возможное значение величины $x - y$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Избавимся от переменной z:

$$1 = xy + z(x + y) = xy + (2 - x - y)(x + y) = 2x + 2y - x^2 - y^2 - xy \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x + 2y.$$

Пусть $a = x + y$ и $b = x - y$, выразим всё через a и b:

$$x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad a^2 - \frac{a^2 - b^2}{4} + 1 = 2a \quad \Rightarrow \quad 3a^2 + b^2 + 4 = 8a \quad \Rightarrow$$

$$b^2 = -3a^2 + 8a - 4.$$

Оценим величину $b^2 = -3a^2 + 8a - 4$ сверху:

$$(-3a^2 + 8a - 4) - \frac{4}{3} = -3\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad -3a^2 + 8a - 4 \leqslant \frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что $b^2 \leqslant \frac{4}{3}$ и $x - y = b \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Также отметим, что значение $x-y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ достигается при $(x, y, z) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Действительно, в этом случае $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b^2 = -3a^2 + 8a - 4$, поэтому все неравенства, приведённые выше, обращаются в равенства. $\square$

Критерии

Следующие критерии суммируются:

5 б. Доказано, что $x - y \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2 б. Доказано, что существует тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая условиям задачи, для которой $x - y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть только верный ответ.