Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2021. Заключительный этап. 11 класс.

Задача 1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна).

Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2021?

Задача 2. Из деревни в город шёл путник. В 14:00, когда путник прошёл четверть пути, из деревни в город выехал мотоциклист, а из города в деревню — грузовик. В 15:00 мотоциклист догнал путника, а в 15:30 встретил грузовик. Во сколько путник встретит грузовик?

Задача 3. В первой четверти координатной плоскости отметили две точки A и B с целочисленными координатами. Оказалось, что $\angle AOB = 45^\circ$, где O — начало координат. Докажите, что хотя бы одна из четырёх координат точек A и B — чётное число.

Задача 4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. На AB отметили точку E такую, что прямая EO параллельна основаниям трапеции. Оказалось, что EO — биссектриса угла CED. Докажите, что трапеция — прямоугольная.

Задача 5. Есть колода из 1024 карточек, на каждой из которых написан набор различных цифр от 0 до 9, причём все наборы различны (в частности, есть и пустая карточка). Назовём набор карточек *полным*, если на них каждая цифра от 0 до 9 встречается ровно по разу.

Найдите все натуральные k, для которых существует набор из k карточек со следующим условием: среди них нельзя выбрать полный набор, но при добавлении любой карточки из колоды это условие нарушается.

Задача 6. Даны положительные действительные числа a, b, c. Известно, что

$$(a-b)\ln c + (b-c)\ln a + (c-a)\ln b = 0.$$

Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Здесь $\ln x$ — это натуральный логарифм (логарифм числа x по основанию e).