Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2021. Заключительный этап. 7 класс.

Задача 1. Пете на дом задали несколько задач по физике и несколько по математике. Все решённые Петей задачи составляют 5% от количества всех задач по физике и 20% от количества всех задач по математике. Сколько процентов от общего количества задач решил Петя?

Решение. *Ответ:* 4%.

Пусть Петя решил N задач. Это составляет 5% ($\frac{1}{20}$ долю) от задач по физике, поэтому всего задач по физике было $20N$. Аналогично, задач по математике было $5N$, тогда всего задач было задано $20N + 5N = 25N$. Решённые Петей задачи составляют от них $\frac{N}{25N} \cdot 100\% = 4\%$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан не в процентах, а в виде дроби $\frac{1}{25}$ или $0{,}04$.

3 б. Есть только верный ответ.

Задача 2. В двузначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Решение. *Ответ:* 14.

Пусть x — первоначальное число, тогда получившееся число равняется $4x$. При этом после увеличения двух цифр само число было увеличено на 22, 24, 42 или 44. Получается четыре случая:

- $4x - x = 22$;
- $4x - x = 24$;
- $4x - x = 42$;
- $4x - x = 44$.

Среди них нам подходит только третий, соответствующий значению $x = 14$.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Есть только верный ответ.

Если задача сведена к разбору четырёх случаев из решения выше, то за каждый неверно разобранный случай снимается 1 балл.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Оказалось, что $AB + BD = DC$. Докажите, что $\angle B = 2\angle C$.

Решение. Отметим точку M на продолжении стороны BC за точку B так, что $AB = BM$. Тогда в равнобедренном треугольнике ABM внешний угол при вершине B равен сумме двух равных углов при основании AM, поэтому $\angle ABC = 2\angle AMB$.

Также равнобедренным является треугольник AMC, поскольку отрезок AD является его высотой и медианой одновременно ($DC = AB+BD = BM+BD = MD$). Тогда $\angle AMB = \angle ACB$ — его углы при основании.

Итак, $\angle ABC = 2\angle AMB = 2\angle ACB$, что и требовалось.

Замечание. Аналогичное решение получается, если отметить на отрезке DC точку N такую, что $BD = DN$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Корректно доказано, что треугольники ABM и AMC равнобедренные, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Построена точка M либо точка N (либо аналогичная по построению), есть дальнейшие продвижения, но они не приводят к правильному ответу.

Задача 4. На доске написано N натуральных чисел, где $N \geqslant 5$. Известно, что сумма всех чисел равна 80, а сумма любых пяти из них не больше 19. Какое наименьшее значение может принимать N?

Решение. Ответ: 26.

Условие задачи равносильно тому, что сумма пяти наибольших чисел не превосходит 19, а сумма всех чисел равна 80. Заметим, что среди пяти наибольших чисел обязательно есть число, не большее 3 (иначе, если все они не меньше 4, их сумма не меньше $4 \cdot 5 = 20$, а должна быть не больше 19).

Обозначим количество всех чисел за x. Раз среди пяти наибольших есть число, не большее 3, то и все остальные $x-5$ чисел не больше 3. Следовательно, сумма всех чисел не превосходит $3(x-5)+19$, а с другой стороны, она равна 80. Итого мы получаем неравенство $3(x-5)+19 \geqslant 80$. Решая это неравенство и учитывая, что x является целым числом, получаем, что $x \geqslant 26$.

Осталось привести пример таких 26 чисел. Возьмём 24 тройки и 2 четвёрки, тогда общая сумма равна $24 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 80$, а сумма любых пяти не больше $3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17 \leqslant 19$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Явно приведены 26 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

1 б. Есть только верный ответ.

Задача 5. Таблица 9×9 разделена на девять квадратов 3×3. Петя и Вася по очереди вписывают в клетки таблицы числа от 1 до 9 по правилам судоку, то есть ни в какой строке, ни в каком столбце и ни в одном из девяти квадратов 3×3 не должно быть написано двух одинаковых чисел. Петя начинает игру; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Решение. Ответ: Петя.

Приведём выигрышную стратегию для Пети. Своим первым ходом он ставит в центр таблицы (назовём его C) число 5, а далее, если Вася поставил в какую-то клетку число a, то Петя поставит число $10-a$ в клетку, симметричную клетке Васи относительно центра таблицы. Такими действиями Петя поддерживает «симметричность» заполнения таблицы.

Предположим, своим ходом Петя нарушил одно из условий задачи: его число $10-a$ совпало с каким-то ранее поставленным числом b из его строки, столбца или квадрата 3×3.

Покажем, что это число b не может быть только что поставленным числом Васи. Если это так, то $10-a=a$ и $a=5$, и эти два одинаковых числа стоят либо в одной строке или столбце с C, либо в одном квадрате 3×3 с C. Но тогда Вася не мог бы сделать свой последний ход, ведь центр таблицы C уже занят числом 5, противоречие.

Если же число $10-a$ совпало с каким-то числом b, поставленным до последнего хода Васи, то тогда и симметричное число a (которое только что поставил Вася) должно было совпасть с симметричным числом $10-b$, и они тоже бы находились в одном столбце, строке или квадрате 3×3. Но тогда Вася не мог бы сделать свой последний ход, противоречие.

Из вышеописанного следует, что Петя всегда может сделать свой ход, т. е. рано или поздно Вася проиграет.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 4 б. Приведена выигрышная стратегия, но нет обоснования, почему она является таковой.
- 0 б. Приведена стратегия, которая в некоторых случаях не приводит к победе Пети.
- 0 б. Есть только верный ответ.