Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2021. Заключительный этап. 6 класс.

Задача 1. У Пети есть таблица 3×3. Он ставит в её клетки фишки по следующим правилам:

- в каждую клетку можно поставить не более одной фишки;
- в пустую клетку можно поставить фишку, если в соответствующих строке и столбце уже суммарно стоит чётное число фишек (0 является чётным числом).

Какое наибольшее количество фишек может поставить Петя?

Решение. Ответ: 9.

Обозначим через a, b, c левый, средний, правый столбцы таблицы, а через $1, 2, 3$ — нижнюю, среднюю, верхнюю строки таблицы. Петя может заполнить фишками все 9 клеток таблицы, например, в следующем порядке: $a1, b2, c3, a2, b3, c1, a3, b1, c2$. Очевидно, больше 9 фишек поставить не удастся. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть только верный ответ (отсутствует алгоритм расстановки фишек).

Задача 2. В двузначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Решение. Ответ: 14.

Пусть x — первоначальное число, тогда получившееся число равняется $4x$. При этом после увеличения двух цифр само число было увеличено на 22, 24, 42 или 44. Получается четыре случая:

- $4x - x = 22$;
- $4x - x = 24$;
- $4x - x = 42$;
- $4x - x = 44$.

Среди них нам подходит только третий, соответствующий значению $x = 14$.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 5 б. Правильно найдены и доказаны возможные цифры, стоящие в разряде единиц, и получен правильный ответ, однако не доказаны цифры, стоящие в разряде десятков.
- 5 б. Правильно найдены и доказаны возможные цифры, стоящие в разряде десятков и получен правильный ответ, однако не доказаны цифры, стоящие в разряде единиц
- 5 б. Без доказательства вводится ограничение неизмененного числа сверху, но доказывается, что для всех чисел меньше этого ограничения существует единственное верное решение – 14.
- 3 б. Есть только верный ответ.

Если задача сведена к разбору четырёх случаев из решения выше, то за каждый неверно разобранный случай снимается 1 балл.

Задача 3. У мудреца есть 11 внешне одинаковых алмазов: 10 обычных и 1 волшебный. Мудрец знает, что все обычные алмазы весят одинаково, а волшебный отличается от них по весу. Также у мудреца есть чашечные весы, на которых можно сравнить вес двух кучек алмазов.

Как за два взвешивания мудрецу определить, тяжелее или легче волшебный алмаз по сравнению с обычным? Определять, какой именно алмаз является волшебным, не требуется.

Решение. Приведём один из возможных алгоритмов мудреца.

Пронумеруем алмазы числами от 1 до 11. Положим на одну чашу алмазы $1, 2, 3$, а на другую — $4, 5, 6$.

Первый случай. Одна из чаш перевесила. Не нарушая общности, чаша $1, 2, 3$ оказалась тяжелее. Тогда среди алмазов $1, \ldots, 6$ точно есть волшебный, следовательно, все алмазы $7, \ldots, 11$ — обычные. Вторым взвешиванием сравним $1, 2, 3$ и $7, 8, 9$. Если они равны, то волшебный алмаз находится среди $4, 5, 6$, и он легче обычного. Если они не равны, то волшебный алмаз находится среди $1, 2, 3$, и он тяжелее обычного.

Второй случай. Чаши оказались в равновесии. Тогда среди алмазов $1, \ldots, 6$ точно нет волшебного, следовательно, он находится среди $7, \ldots, 11$. Вторым взвешиванием сравним 1, 2, 3, 4, 5 и $7, 8, 9, 10, 11$. Если чаша $7, 8, 9, 10, 11$ перевесит, то волшебный алмаз тяжелее обычного, иначе — легче. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Приведён верный алгоритм действий, рассмотрены все ситуации, но допущена ошибка в ответе, либо решение не доведено до полноценного ответа.

3 б. Приведен в целом верный алгоритм действий, однако, рассмотрены и доведены до правильного ответа не все возможные ситуации.

0 б. Приведён алгоритм, который работает только в некоторых случаях.

Задача 4. На доске написано выражение

$$7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1.$$

Маша вместо звёздочек расставляет знаки «+» и «−». За один ход Ваня может поменять два подряд идущих знака на противоположные. Ваня хочет, чтобы спустя несколько его ходов получилось выражение, значение которого делится на 7. Может ли Маша расставить знаки так, чтобы Ваня **не** мог добиться желаемого?

Решение. Ответ: не может.

Покажем, как Ване добиться делящегося на 7 выражения. Знак между 7 и 6 можно считать плюсом (если там минус, поменяем его и следующий знак). Аналогично далее можно считать плюсом знак между 6 и 5, затем между 5 и 4, затем между 4 и 3, затем между 3 и 2.

Если между 2 и 1 стоит плюс, то Ваня добился требуемого: $7+6+5+4+3+2+1 = 21$ делится на 7.

Если же между 2 и 1 стоит минус, то Ваня может поменять знаки перед 4 и 3, а затем перед 3 и 2. Тогда Ваня снова добился требуемого: $7+6+5-4+3-2-1 = 14$ делится на 7. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Приведён верный алгоритм действий Вани, но почему он работает, не очевидно и не обосновано.

0 б. Есть только ответ «не может».

Задача 5. На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1011 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Ответ: 1.

Среди чисел от 1 до 2021 выделим 1010 непересекающихся пар чисел, дающих в сумме 2022. А именно: $(1, 2021)$, $(2, 2020)$, $\ldots$, $(1009, 1013)$, $(1010, 1012)$; без пары осталось только число 1011.

В каждой из пар по условию можно выбрать не более одного числа. Следовательно, чтобы выбрать 1011 чисел, из каждой пары надо выбрать ровно одно число, а также надо выбрать число 1011. Тогда нельзя выбрать 1010 (иначе $1011 + 1010 = 2021$), но тогда надо выбрать 1012 (иначе из последней пары ничего не выбрано). Тогда нельзя выбрать 1009 (иначе $1012 + 1009 = 2021$), но тогда надо выбрать 1013 (иначе из предпоследней пары ничего не выбрано). Продолжая так и далее, мы получаем, что из каждой пары должно быть выбрано наибольшее число.

Если выбраны числа $1011, 1012, 1013, \ldots, 2021$, то условие задачи выполняется (т. к. сумма любых двух не меньше 2023) и такой способ выбора — единственный.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Присутствует разбиение чисел на пары, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Есть только ответ.