Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2021. Заключительный этап. 11 класс.

Задача 1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна).

Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2021?

Решение. Ответ: нет.

Воспользуемся известным вспомогательным утверждением (эквивалентным *лемме о рукопожатиях*): в любой компании количество людей, которые дружат с нечётным числом остальных, чётно.

Из утренних заявлений следует, что каждый рыцарь дружит с нечётным числом рыцарей, а каждый лжец, в свою очередь, дружит с чётным числом рыцарей. Из вечерних заявлений следует, что каждый лжец дружит с нечётным числом лжецов, а каждый рыцарь дружит с чётным числом лжецов. Отсюда следует, что и рыцари, и лжецы дружат с нечётным количеством жителей острова, и, согласно лемме о рукопожатиях, количество рыцарей и количество лжецов чётно. Но тогда общее количество жителей острова чётно и не может равняться 2021.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

Следующие критерии суммируются:

+2 б. Проведён полный анализ четности количества друзей у каждого рыцаря.

+2 б. Проведён полный анализ четности количества друзей у каждого лжеца.

+2 б. Применена лемма о рукопожатиях или аналогичное утверждение.

+1 б. Получен верный обоснованный ответ. За отсутствие доказательства утверждения, эквивалентного лемме о рукопожатиях, баллы не снимаются.

Задача 2. Из деревни в город шёл путник. В 14:00, когда путник прошёл четверть пути, из деревни в город выехал мотоциклист, а из города в деревню — грузовик. В 15:00 мотоциклист догнал путника, а в 15:30 встретил грузовик. Во сколько путник встретит грузовик?

Решение. Ответ: 15:48.

Обозначим всё расстояние за S, а скорости путника, мотоцикла и грузовика — за V_p, V_m и V_g соответственно (расстояние измеряем в километрах, а скорость — в километрах в час). По условию мотоциклист догнал путника за один час. Их скорость сближения равна $V_m - V_p$, а расстояние между ними $S/4$, поэтому имеет место уравнение

$$\frac{S/4}{V_m - V_p} = 1.$$

Через полтора часа после начала движения встретились мотоцикл и грузовик. Их скорость сближения равна $V_m + V_g$, а суммарное пройденное ими расстояние равно S, поэтому имеет место уравнение

$$\frac{S}{V_m + V_g} = 1,5.$$

Преобразуем оба уравнения и получим

$$\begin{cases} V_m - V_p = \dfrac{S}{4} \\ V_m + V_g = \dfrac{2S}{3}. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и получим

$$V_g + V_p = \frac{5S}{12},$$

откуда находим

$$\frac{3S/4}{V_g + V_p} = \frac{9}{5}.$$

Следовательно, путник и грузовик встретились через $9/5$ часа после начала движения. Переводя это время в часы и минуты, получаем, что путник и грузовик встретились в 15:48.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Верно написана система уравнений движения.

Задача 3. В первой четверти координатной плоскости отметили две точки A и B с целочисленными координатами. Оказалось, что $\angle AOB = 45^\circ$, где O — начало координат. Докажите, что хотя бы одна из четырёх координат точек A и B — чётное число.

Решение. Пусть точка A имеет целочисленные координаты $(a;b)$, а точка B — координаты $(c;d)$. Запишем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}(a;b)$ и $\overrightarrow{OB}(c;d)$ двумя способами: через координаты и через угол между ними.

$ac+bd=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos 45^\circ=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда

$$2(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Предположим, все числа a,b,c,d нечётны, тогда все выражения в скобках являются чётными числами. Квадрат любого нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 4 (поскольку $(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$), поэтому каждая из скобок в правой части является чётным числом, не делящимся на 4. Получаем противоречие с тем, что левая часть равенства делится на $2\cdot 2^2=8$, а правая — на 8 не делится.

$\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Доказано равенство $2(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Доказано равенство $4abcd=(a^2-b^2)(c^2-d^2)$, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Доказано равенство $ac+bd=ad-bc$, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Доказано равенство $\frac{a+b}{a-b}=\frac{d}{c}$, но дальнейших продвижений нет.

2 б. В решении с дополнительным построением – поворотом отрезка OA на угол $\frac{\pi}{2}$ – приведена идея о том, что отрезок OB лежит на биссектрисе построенного угла, но в остальном решение неверно.

Задача 4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. На AB отметили точку E такую, что прямая EO параллельна основаниям трапеции. Оказалось, что EO — биссектриса угла CED. Докажите, что трапеция — прямоугольная.

Решение. Пусть прямая DE пересекает прямую BC в точке K. Заметим, что $\angle BCE=\angle CEO=\angle DEO=\angle DKC$, поэтому треугольник CEK является равнобедренным и $CE=EK$. Докажем, что отрезок EB является его медианой — отсюда последует, что он также является и высотой, и трапеция окажется прямоугольной (в силу того, что $\angle ABC=90^\circ$).

Треугольники DBK и DOE подобны с коэффициентом $\frac{BD}{OD}$, а также треугольники ABC и AEO подобны с коэффициентом $\frac{AC}{AO}$. Эти коэффициенты подобия равны, поскольку параллельные прямые BC и AD высекают на прямых AC и BD пропорциональные отрезки (также это можно вывести из подобия треугольников AOD и COB).

Итак, $KB = \frac{BD}{OD} \cdot EO = \frac{AC}{AO} \cdot EO = BC$, откуда и следует решение задачи.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Приведено в целом верное доказательство с незначительными неточностями.

2 б. Доказано равенство либо $\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{BE}$, либо $\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EC}$.

1 б. Построена точка K, но дальнейших продвижений нет.

Задача 5. Есть колода из 1024 карточек, на каждой из которых написан набор различных цифр от 0 до 9, причём все наборы различны (в частности, есть и пустая карточка). Назовём набор карточек *полным*, если на них каждая цифра от 0 до 9 встречается ровно по разу.

Найдите все натуральные k, для которых существует набор из k карточек со следующим условием: среди них нельзя выбрать полный набор, но при добавлении любой карточки из колоды это условие нарушается.

Решение. Ответ: 512.

Для каждой карточки рассмотрим другую, дополняющую её до полного набора (например, для карточки 3679 такой карточкой будет 012458). Ясно, что все 1024 карточки разбиваются на 512 непересекающихся пар карточек, дополняющих друг друга до полного набора. Далее мы докажем, что в любом искомом наборе обязательно есть ровно по одной карточке из каждой такой пары, т. е. $k = 512$.

Из условия следует, что максимум одна карточка из пары может быть среди выбранных. Теперь покажем, что из каждой пары должна быть хотя бы одна карточка.

Рассмотрим пару дополняющих друг друга карточек, обозначим их A и B. Предположим, что они обе не входят в выбранный набор. По условию при добавлении любой карточки из колоды найдётся полный набор. Добавив в набор A, мы найдём несколько карточек, дополняющих A до полного набора, т. е. все цифры на этих карточках просто совпадают с множеством цифр на карточке B. Аналогично, добавив карточку B, мы найдём несколько карточек из набора, цифры на которых совпадают с множеством цифр на карточке A. Тогда объединим все эти карточки (которые совпадают с наборами на карточках A и B) и получим полный набор, противоречие.

Приведём теперь пример возможного набора для $k = 512$. Выберем все карточки, на которых нет цифры 9, в данном наборе таких ровно 512. Ясно, что среди них нет полного набора (цифры 9 в принципе нигде нет), и для каждой невыбранной карточки дополняющая к ней содержится среди выбранных, т. е. при её добавлении появится полный набор из этих двух карточек. $\square$

Критерии

Баллы за следующие достижения суммируются:

4 б. Доказано, что $k \geqslant 512$ (или что в каждой паре карточек, дополняющих друг друга до полного набора, должна быть выбрана хотя бы одна карточка).

1 б. Доказано, что $k \leqslant 512$ (или что в каждой паре карточек, дополняющих друг друга до полного набора, должно быть выбрано не более одной карточки).

1 б. Приведён верный пример набора из 512 карточек.

1 б. Приведено обоснование того, что пример набора из 512 карточек удовлетворяет условиям задачи.

0 б. Только верный ответ.

Задача 6. Даны положительные действительные числа a, b, c. Известно, что

$$(a-b)\ln c + (b-c)\ln a + (c-a)\ln b = 0.$$

Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Здесь $\ln x$ — это натуральный логарифм (логарифм числа x по основанию e).

Решение. Воспользуемся следующим известным утверждением.

Если на координатной плоскости даны точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то для любого действительного α точка с координатами $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2;\ \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)$ лежит на прямой, проходящей через $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Верно также и обратное утверждение: если точка лежит на прямой с начальными двумя, то найдётся такое действительное α, для которого координаты данной точки представляются в искомом виде.

Перейдём теперь к решению задачи. Если $a = c$, то всё очевидно. Если $a \neq c$, поделим равенство на $a - c$ и перенесём $\ln b$ в другую часть, получим

$$\ln b = \frac{b-c}{a-c}\ln a + \frac{a-b}{a-c}\ln c.$$

Рассмотрим на координатной плоскости две точки $A(a; \ln a)$ и $C(c; \ln c)$, а также обозначим $\alpha = \frac{b-c}{a-c}$ (тогда $1-\alpha = \frac{a-b}{a-c}$). Из утверждения выше следует, что точка

B с координатами $x_B = \frac{b-c}{a-c}a + \frac{a-b}{a-c}c = b$ и $y_B = \frac{b-c}{a-c}\ln a + \frac{a-b}{a-c}\ln c = \ln b$ лежит на прямой AC. Следовательно, точки $A(a; \ln a)$, $B(b; \ln b)$ и $C(c; \ln c)$ лежат на одной прямой. Но также ясно, что эти точки лежат на графике $y = \ln x$. Из свойств функции $\ln x$ известно, что графики логарифма и прямой могут пересекаться максимум по двум точкам (как говорят, функция $\ln x$ является *вогнутой*), а это значит, что какие-то два из трёх чисел a, b, c совпадают и $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

$\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое решение задачи, в котором доказано, что какие-то два из чисел a, b, c равны.

2 б. Условие $(a-b)\ln c + (b-c)\ln a + (c-a)\ln b = 0$ сведено к уравнению от двух переменных.

0 б. Условие $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ эквивалентно переформулировано в виде того, что какие-то два из чисел a, b, c равны, но это не доказано.

За отсутствие доказательства утверждения о параметризации прямой и утверждения о вогнутости логарифма баллы не снимаются.