

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020  
Заключительный этап  
8 класс

**Задача 1.** Про два ненулевых числа  $a$  и  $b$  известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}.$$

Верно ли, что числа  $a$  и  $b$  равны?

**Задача 2.** У квадрата  $5 \times 5$  есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

**Задача 3.** Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Бовиваре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

Друзья договорились, что часть пути Додсон проедет верхом, затем привяжет Боливара у одного из телеграфных столбов и далее пойдёт пешком, а Уильямс первоначально будет идти пешком, а затем поедет верхом на Бовиваре. У какого столба Додсону надо привязать Боливара, чтобы они преодолели путь до города Б как можно быстрее?

**Задача 4.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $A$  проведена высота  $AH$ . На продолжении гипотенузы  $BC$  за точку  $C$  нашлась точка  $X$  такая, что

$$HX = \frac{BH + CX}{3}.$$

**Задача 5.** В клетках шахматной доски  $8 \times 8$  стоят 8 белых и 8 чёрных фишек так, что никакие две фишки не стоят в одной клетке. Кроме того, ни в одном столбце и ни в одной строке не стоят одноцветные фишки. Для каждой белой фишки посчитали расстояние до чёрной фишки, стоящей с ней в одном столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих расстояний? Расстоянием между фишками будем считать расстояние между центрами клеток, которые они занимают.