

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
7 класс

Задача 1. Поезд состоит из 20 вагонов, которые пронумерованы от 1 до 20, начиная от начала поезда. Некоторые вагоны являются почтовыми. Известно, что

- всего почтовых вагонов — чётное число;
- номер ближайшего к началу поезда почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов;
- номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов;
- любой почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном.

Найдите номера всех почтовых вагонов в поезде.

Задача 2. У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы их произведение делилось на 81, а сумма делилась на 9?

Задача 3. У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BL . На отрезке BC выбрана точка E , а на отрезке CL — точка D так, что $\angle LDE = 90^\circ$, $AL = DE$. Докажите, что $AB = LD + BE$.

Задача 5. Шесть мальчиков и шесть девочек встали в круг, чередуясь. Каждый из них написал в своем блокноте ненулевое число. Известно, что каждое число, написанное мальчиком, равно сумме чисел, написанных рядом стоящими девочками, а каждое число, написанное девочкой, равно произведению чисел, написанных рядом стоящими мальчиками. Чему может равняться сумма всех двенадцати чисел?