

**8 класс**

**Задача 8.1.** Страна имеет форму квадрата и разделена на 25 одинаковых квадратных графств. В каждом графстве правит либо граф-рыцарь, который всегда говорит правду, либо граф-лжец, который всегда лжет. Однажды каждый граф сказал: «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов.» Какое максимальное число рыцарей могло быть? (Графы являются соседями, если их графства имеют общую сторону.)

*Ответ:* 8.

*Решение.* См. решение задачи ??.

□

**Задача 8.2.** Определите все пары натуральных чисел  $n$  и  $m$ , для которых числа  $n^2 + 4m$  и  $m^2 + 5n$  являются квадратами.

*Ответ:*  $(m, n) = (2, 1), (22, 9), (9, 8)$ .

*Решение.* Разберем два случая. Сначала предположим, что  $m \leq n$ . Тогда  $n^2 + 4m \leq n^2 + 4n < (n+2)^2$ . Следовательно,  $n^2 + 4m = (n+1)^2$ , откуда  $4m = 2n + 1$ , что невозможно из соображений четности.

Теперь предположим, что  $n < m$ . Тогда  $m^2 + 5n < m^2 + 6m < (m+3)^2$ , откуда либо  $5n = 2m + 1$ , либо  $5n = 4m + 4$ . Изучим каждый из этих подслучаев отдельно.

Если  $5n = 2m + 1$ , то  $4m = 10n - 2$  и число  $n^2 + 10n - 2$  является квадратом. Это квадрат числа, большего  $n$  и меньшего  $n + 5$ , той же четности, что и  $n$ . Следовательно, либо  $n^2 + 10n - 2 = n^2 + 4n + 4$ , либо  $n^2 + 10n - 2 = n^2 + 8n + 16$ . В итоге или  $n = 1$  и  $m = 2$ , или  $n = 9$  и  $m = 22$ .

Если же  $5n = 4m + 4$ , то  $4m = 5n - 4$  и число  $n^2 + 5n - 4$  является квадратом. Это квадрат числа, большего  $n$  и меньшего  $n + 3$ . Значит, либо  $n^2 + 5n - 4 = n^2 + 2n + 1$ , либо  $n^2 + 5n - 4 = n^2 + 4n + 4$ . Первое уравнение имеет нецелый корень, а второе дает  $n = 8$ , откуда  $m = 9$ .

Все полученные ответы подходят.

□

**Критерии**

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

2 б. Есть полный верный ответ.

Если верного ответа нет, но найдено хотя бы одно из решений, то по этому критерию ставится 1 балл вместо 2.

3 б. Верно рассмотрен случай  $m \leq n$ .

3 б. Верно рассмотрен случай  $n \leq m$ .

2 б. Ни один из указанных выше двух случаев верно не рассмотрен, но присутствует идея оценить выражение точным квадратом (например,  $m^2 + 5n < (m+3)^2$  или  $n^2 + 4m < (n+2)^2$ ).

**Задача 8.3.** Сколько существует прямых, проходящих через точку  $(0, 2019)$  и пересекающих параболу  $y = x^2$  в двух точках с целыми координатами по оси  $y$ ?

*Ответ:* 9.

*Решение.* Вертикальная прямая, очевидно, не подходит. Все прямые, отличные от вертикальной и проходящие через точку  $(0, 2019)$ , задаются уравнением  $y = kx + 2019$  с некоторым  $k$ . Пусть такая прямая пересекает параболу в точках  $(a, a^2)$  и  $(b, b^2)$ , причем  $a^2$  и  $b^2$  являются целыми числами. Без ограничения общности будем считать  $a < b$ . Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 = ka + 2019 \\ b^2 = kb + 2019. \end{cases}$$

Вычитая равенства друг из друга, получаем  $a^2 - b^2 = k(a - b)$ , и, поскольку  $a \neq b$ , заключаем, что  $k = a + b$ . Подстановкой полученного  $k$  в любое из уравнений системы приходим к соотношению  $-ab = 2019$ .

Заметим, что это равенство эквивалентно тому, что точки  $(a, a^2)$  и  $(b, b^2)$  лежат на одной прямой. В этом можно убедиться, подставив  $k = a + b$  и  $2019 = -ab$  в приведенную выше систему.

Возведя уравнение в квадрат, получаем  $a^2b^2 = 2019^2$ , причем  $a^2$  и  $b^2$  — целые неотрицательные числа (но  $a$  и  $b$  не обязательно целые!). Учитывая разложение  $2019^2 = 3^2 \cdot 673^2$  на простые множители, мы имеем 9 вариантов разложения числа  $2019^2$  в произведение  $a^2 \cdot b^2$  (с учетом порядка сомножителей). Так как  $a$  и  $b$  разных знаков, и  $a < b$ , то каждый такой вариант соответствует единственному решению  $a = -\sqrt{a^2}$ ,  $b = \sqrt{b^2}$  и, соответственно, одной искомой прямой.

*Замечание.* На схожей идее основана известная геометрическая конструкция — решето Матиясевича–Стечкина.  $\square$

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 3 б. Получено уравнение, эквивалентное равенству  $-ab = 2019$  из решения, но дальнейший подсчет числа прямых по какой-то причине произведен неправильно.
- 2 б. Получено уравнение, эквивалентное равенству  $k = a + b$  из решения.
- 1 б. Есть верный ответ.

**Задача 8.4.** Расстояния от точки  $P$ , лежащей внутри равностороннего треугольника, до его вершин равны 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

*Ответ:*  $9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}$ .

*Решение.* Обозначим вершины треугольника буквами  $A, B$  и  $C$  таким образом, что  $PA = 3$ ,  $PB = 4$  и  $PC = 5$ . Построим точку  $C_1$  такую, что  $ACC_1$  — равносторонний треугольник и отметим внутри него точку  $P_1$  такую, что  $P_1A = 3$ ,  $P_1C = 4$  и  $P_1C_1 = 5$  (рис. 1). Треугольники  $AP_1C$  и  $APB$  равны по трем сторонам, поэтому  $\angle P_1AC = \angle PAB$ . Следовательно,  $\angle PAP_1 = 60^\circ$ , т. е. треугольник  $APP_1$  равносторонний. (То же заключение можно получить, воспользовавшись поворотом вокруг точки  $A$  на  $60^\circ$ .) В итоге имеем  $PP_1 = 3$ ,  $PC = 5$ ,  $P_1C = 4$ . Из этого по теореме Пифагора следует, что треугольник  $PP_1C$  прямоугольный с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5, и его площадь равна 6. Площадь равностороннего треугольника  $PP_1A$  со стороной 3 равна  $9\sqrt{3}/4$ . Следовательно, учитывая равенство треугольников  $APB$  и  $AP_1C$ , выводим

$$S_{APB} + S_{CPA} = S_{AP_1C} + S_{CPA} = S_{CPP_1} + S_{APP_1} = 6 + \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

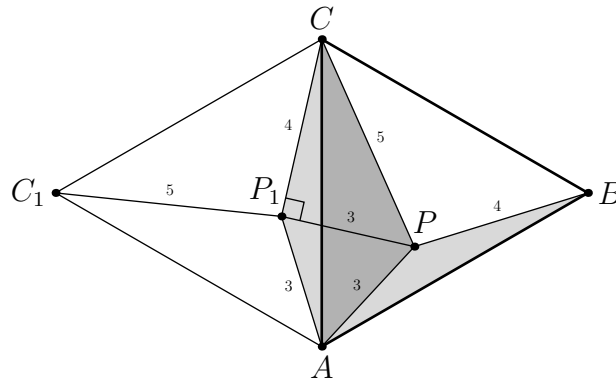


Рис. 1: к решению задачи 8.4

Аналогичными рассуждениями приходим к равенствам

$$S_{CPA} + S_{BPC} = 6 + \frac{25\sqrt{3}}{4}, \quad S_{BPC} + S_{APB} = 6 + \frac{16\sqrt{3}}{4}.$$

Складывая три полученных соотношения и деля пополам, получаем

$$S_{ABC} = 9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}. \quad \square$$

#### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 4 б. Верно найдена любая из сумм площадей  $S_{APB} + S_{CPA}$ ,  $S_{CPA} + S_{BPC}$  или  $S_{BPC} + S_{APB}$ .
- 3 б. Верный алгоритм нахождения любой из указанных выше сумм площадей, но допущена арифметическая ошибка.
- 2 б. Приведен верный ответ.

**Задача 8.5.** На танцевальный вечер пришло  $n$  пар *партнеров*, каждая пара — это девушка и юноша. Вечер состоит из не менее чем  $n$  танцев, в каждом из которых участвуют все пришедшие. Изначально юноши рассаживаются за круглым столом. На первый танец каждая девушка приглашает одного из юношей (не обязательно своего партнера). После танца девушка проводит юношу, с которым она танцевала, к его месту за столом, и на следующий танец приглашает следующего за ним юношу против часовой стрелки.

Для каких  $n$  можно рассадить юношей за столом и указать пары для первого танца так, чтобы в каждом танце хотя бы одна девушка танцевала с партнером, с которым пришла на вечер?

*Ответ:* Для нечетных  $n$ .

*Решение.* Покажем, как выполнить условие для нечетных  $n = 2k + 1$ . Пронумеруем юношей за столом и соответствующих им девушек числами  $1, 2, \dots, n$ . Пусть девушка с номером  $j$  на первый танец пригласит юношу с номером  $2j$ , если  $j \leq k$ , и с номером  $2j - n$ , если  $k + 1 \leq j \leq n$ . Тогда первый танец девушка с номером  $n$  будет танцевать со своим партнером. Далее, несложно видеть, что  $j$ -ый танец девушка с номером  $n - j + 1$  будет танцевать со своим партнером. Действительно, при  $j \leq k + 1$  девушка с номером  $n - j + 1$  первый танец танцует с юношей с номером  $n - 2j + 2$ , а  $j$ -ый танец с юношей с номером

$n - 2j + 2 + (j - 1) = n - j$ , то есть со своим партнером. Если же  $j \geq k + 2$ , то первый танец девушка с номером  $n - j + 1$  танцует с юношей с номером  $2n - 2j + 2$ , а  $j$ -ый с юношей с номером  $2n - 2j + 2 + (j - 1) - n = n - j + 1$ , то есть опять же со своим партнером. Отметим, что вычитание  $n$  в последнем вычислении произошло из-за перехода от  $n$ -го юноши к первому.

Покажем, что для четных  $n$  выполнить условие задачи не получится. Пронумеруем юношей за столом  $1, 2, \dots, n$ . Пусть в изначальной расстановке с юношей под номером  $j$  танцует девушка с номером  $a_j$ . Тогда, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо чтобы величины  $a_j - j$  имели разные остатки при делении на  $n$ . Просуммируем числа  $a_j - j$  по всем  $j$  от 1 до  $n$ . Заметим, что это сумма, с одной стороны, равна 0, а с другой стороны, при делении на  $n$  дает такой же остаток, как и сумма  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Однако при четных  $n$  это выражение не делится на  $n$ , что приводит к противоречию.  $\square$

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 3 б. Показано, как выполнить условие для нечетного  $n$ .
- 3 б. Доказано, что для четного  $n$  нельзя выполнить условие.