

1. Точки  $G$ ,  $F$ ,  $E$ ,  $D$  — соседние вершины правильного многоугольника (именно в таком порядке). Известно, что  $\angle GFD = 144^\circ$ . Сколько вершин у этого многоугольника? **[2 балла]**

2. Натуральные числа от 1, 2, 3, ... выписывали подряд без пробелов, пока в полученной строке 1234567891011121314... не встретилась четвёрка цифр ...2016... На каком месте от начала строки стоит цифра 6 из этой четвёрки? **[4 балла]**

3. Дан квадратный трёхчлен  $ax^2 + bx + c$ , где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  — положительны, а трёхчлен имеет два различных корня. По этому трёхчлену строится новый трёхчлен по такому правилу: каждый коэффициент заменяется на произведение двух других коэффициентов (например, из трёхчлена  $2x^2 + 5x + 3$  получается трёхчлен  $15x^2 + 6x + 10$ ). Затем то же делается с полученным трёхчленом и так далее, пока не будет получено 2016 трёхчленов, включая исходный. У скольких из полученных трёхчленов нет действительных корней? **[5 баллов]**

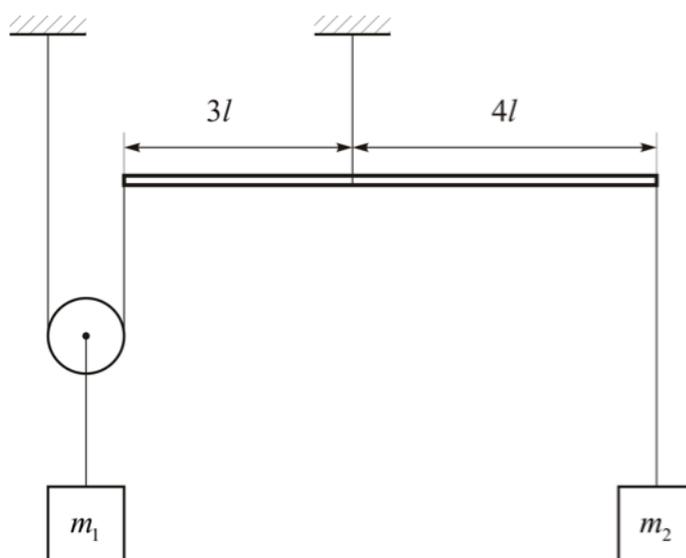
4. Ткачиха с поварихой готовили пир. У каждой из них по коробу, в которых одинаковое число конфет. Ткачиха разложила конфеты из своего короба на 10 блюдец поровну, а остаток — меньше 10 — положила себе в карман. Повариха разложила часть конфет из своего короба на другие 11 блюдец поровну, а остальные (их было больше 11) — положила себе в карман. После того, как повариха положила себе в карман ещё и все конфеты с одного блюда ткачихи, у неё в кармане стало 60 конфет. Сколько конфет в кармане ткачихи? **[5 баллов]**

5. За круглым столом сидят 111 участников конференции. Они делятся на два типа: политики (всегда лгут) и учёные (всегда говорят правду). Все знают, кто есть кто. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Политик ли ваш левый сосед?». Ответов «нет» оказалось ровно в 3 раза меньше, чем учёных за столом. Какое наименьшее число учёных могло сидеть за этим столом? **[7 баллов]**

6. В единичный куб вписаны две шестиугольные пирамиды, чьи основания совпадают с сечением куба соответствующей плоскостью основания. Вершина первой пирамиды — точка  $A$ , второй — точка  $C$ , где  $ABCD$  — грань куба. Все боковые ребра первой пирамиды имеют длину  $m$ , боковые ребра второй — длину  $n$ , где  $1,2 < n < m < 1,4$ . Найдите число вершин многогранника, который является пересечением этих пирамид. **[9 баллов]**

Работа рассчитана на 240 минут

- Из трёх различных прямых  $y = a^2x - a$ ,  $y = b^2x - b$ ,  $y = c^2x - c$  каждые две пересекаются друг с другом. Докажите, что точек пересечения ровно три.
- На доске написаны четыре разных числа, одно из них равно 2016. Петя вычислил шесть попарных произведений этих чисел. Оказалось, что каждое произведение равно какому-нибудь из чисел четвёрки. Найдите три других числа четвёрки.
- Диагонали вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $E$  на стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Докажите, что  $PQ + RS = PS + QR$ .
- Вершины выпуклого 25-угольника занумерованы различными нечётными числами от 3 до 51 (номера могут идти не по порядку). Если одно число делится на другое, и вершины не соседние, их соединяют диагональю. Докажите, что какие-то диагонали пересеклись внутри 25-угольника (совпадение концов диагоналей пересечением не считается).
- Конструкция из невесомого рычага и идеального блока, показанная на рисунке, находится в равновесии. Найдите отношение  $\frac{m_1}{m_2}$  масс грузов.



- Имеется три резистора сопротивлениями 10 Ом, 20 Ом и 30 Ом и соединительные провода, сопротивлением которых можно пренебречь. Нужно собрать такую цепь, чтобы при подключении её к идеальному источнику постоянного напряжения 10 В, выделяющаяся в цепи мощность была максимальна. Если через резистор течёт ток силой  $\geq 0,75$  А, резистор перегорает. Какую цепь нужно собрать? Какая мощность будет в ней выделяться? Замыкать источник накоротко нельзя!
- Два тела начали падать с одной и той же большой высоты, одно вслед за другим через 1,2 секунды. Через какое время, считая от начала падения второго тела, расстояние между телами будет равно 10 м? Ускорение свободного падения  $9,8 \text{ м/с}^2$ .
- Брусок толкнули вверх по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом ( $\sin \alpha = 3/5$ ). Через  $t_1 = 3,0$  с брусок остановился, а через  $t_2 = 4,2$  с вернулся в исходную точку. Найдите коэффициент трения  $\mu$  между бруском и плоскостью.

Работа рассчитана на 240 минут

1. Из трёх различных прямых  $y = a^2x - a$ ,  $y = b^2x - b$ ,  $y = c^2x - c$  каждые две пересекаются друг с другом. Докажите, что точек пересечения ровно три.
2. На доске написаны четыре разных числа, одно из них равно 2016. Петя вычисли шесть попарных произведений этих чисел. Оказалось, что каждое произведение равно какому-нибудь из чисел четвёрки. Найдите три других числа четвёрки.
3. Диагонали вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $E$  на стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Докажите, что  $PQ + RS = PS + QR$ .
4. Вершины выпуклого 25-угольника занумерованы различными нечётными числами от 3 до 51 (номера могут идти не по порядку). Если одно число делится на другое, и вершины не соседние, их соединяют диагональю. Докажите, что какие-то диагонали пересеклись внутри 25-угольника (совпадение концов диагоналей пересечением не считается).
5. Два тела начали падать с одной и той же большой высоты, одно вслед за другим через 0,85 секунды. Через какое время, считая от начала падения второго тела, расстояние между телами будет равно 5,0 м? Ускорение свободного падения  $9,8 \text{ м/с}^2$ .
6. Два шарика из пластилина массами 50 г и 100 г подвешены на вертикальных нитях так, что они соприкасаются и их центры находятся на одной высоте. Шарик массой 50 г отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 3,0 см, а нить, на которой он подвешен остаётся натянутой. После чего этот шарик отпускают. На какую высоту поднимутся шарики после соударения, если при ударе они слиплись?
7. Три одинаковых точечных заряда  $q$  находятся на одной прямой. Расстояния между соседними зарядами одинаково и равно  $a$ . Найдите минимальную работу, которую нужно совершить, чтобы расположить заряды в вершинах правильного треугольника со стороной  $a$ .
8. В цилиндрическом теплоизолированном сосуде под теплоизолированным поршнем массой 15 кг находится идеальный одноатомный газ при температуре 300 К. После того, как на поршень сверху поставили гирю, и система пришла в равновесие, объём, занимаемый газом, уменьшился на 20 %. Найдите массу гири. Трением поршня о стенки цилиндра можно пренебречь, атмосферное давление отсутствует.