7 класс

7.1. Маша и медведь съели корзину малины и 60 пирожков, начав и закончив одновременно. Сначала Маша ела малину, а медведь – пирожки, потом (в какой-то момент) они поменялись. Медведь ел малину в 6 раз быстрее Маши, а пирожки — только в 3 раза быстрее. Сколько пирожков съел медведь, если малины медведь он съел вдвое больше Маши?

Ответ. 54 пирожка. **Решение.** Разделим малину на 3 равные части. Каждую часть медведь ел в 6 раз быстрее Маши, но частей две, значит от затратил на малину только в 3 раза меньше времени чем Маша. Значит, Маша ела пирожки втрое меньше времени, чем медведь. Поскольку она ест втрое медленнее, то она съела пирожков в 9 раз меньше медведя. Разделив пирожки в отношении 9:1, видим, что Маше досталась 10-я часть, то есть 6 пирожков. А остальные 54 пирожка достались медведю.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов, с полным обоснованием — 7 баллов.

7.2. Если у прямоугольника ширину увеличить на 3 см, а высоту уменьшить на 3 см, его площадь не изменится. А как изменится площадь, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 4 см, а высоту увеличить на 4 см?

Ответ. Уменьшится на 28 $см^2$. **Решение.** Обозначим ширину исходного прямоугольника s, а высоту h. Площадь исходного прямоугольника sh, площадь измененного (s+3)(h-3), что равно sh+3(h-s)-9. Ввиду равенства площадей 3(h-s)-9=0, откуда h-s=3. При втором варианте изменения получим площадь (s-4)(h+4)=sh-4(h-s)-16=sh-4·3-16=sh-28. Значит, площадь уменьшится на 28 $см^2$.

7.3. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Представьте число 2016 в виде произведения трех палиндромов, больших 1 (найдите все варианты и объясните, почему других нет).

Ответ. $2\cdot 4\cdot 252$. **Решение.** Число 2016 не делится на 11. Поэтому ни один из палиндромов не двузначен (они все делятся на 11). Значит, два из палиндромов однозначны (если в двух сомножителях не менее 3 знаков, то произведение не меньше чем $100\cdot 100>2016$). Произведение однозначных не меньше 4, поэтому третий сомножитель T не больше 2016/4=504, то есть он трехзначный. Разберем 2 случая. Для этого нам понадобится разложение 2016 на простые множители: $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$.

Случай 1. T<200. Тогда T начинается и заканчивается на 1, то есть он — нечетный. Однако произведение даже всех нечетных простых в разложении 2016 равно только 63, то есть все нечетные делители числа 2016 не трехзначны. Этот случай невозможен.

Случай 2. T≥200. Тогда произведение двух других сомножителей не больше, чем 2016/200, то есть не больше 10. Только 6, 8 и 9 могут быть произведением однозначных делителей числа 2016: $6=2\cdot 3$, $8=2\cdot 4$, $9=3\cdot 3$. Второй вариант подходит, поскольку 2016/8=252 – палиндром; а вот остальные — нет, так как 2016/6=336 и 2016/9=224 – не палиндромы.

Критерий. Верный ответ без обоснований – только 1 балл.

7.4. Отрезки KL и MN пересекаются в точке T. Известно, что треугольник KNT – равносторонний и KL=MT. Докажите, что треугольник LMN – равнобедренный.

Решение. Отложим на луче TM отрезок TD=TL. Поскольку TD=TL<KL=TM, то точка D лежит на отрезке TM. Поскольку $\angle DTL=\angle MTK=60°$ и DT=TL, то треугольник DTL – равносторонний. Тогда LD=LT, $\angle LDM=\angle LTN=120°$ и MD=MT–DT=KL–TL=KT=NT. Значит, треугольники LDM и LTN равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда LM=LN, то есть, треугольник MLN – равнобедренный.

Критерий. Не менее 2 баллов за построение вспомогательного равносторонниего треугольника DTL.

7.5. На олимпиаду пришли 300 семиклассников из 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три – из разных школ.
Решение. Соберем учеников из одной школы, и будем отделять от них команды по 3, пока их не останется 0, 1 или 2. Так как исходное количество учеников кратно 3, то поэтому общее количество оставшихся учеников тоже кратно 3. Но всего их не больше 2+2+2+2=8, то есть осталось всего 0, 3 или 6. Забудем про нули, и выпишем все варианты с ненулевыми остатками: 1+2, 1+1+1, 2+2+2 и 1+1+2+2. Разберем эти случаи.
1+1+1) Из трех школ по одному ученику: как раз команда.
2+2+2) Из трех школ по два ученика — сделаем две команды из учеников разных школ. 1+1+2+2) Из школ А и Б по 1 ученику, из школ В и Г — по два. Сделаем две команды из учеников разных школ: АВГ и БВГ.
1+2) Из школы А 1 ученик, из Б — двое. Добавим к ним по команде из школ В и Г (такие есть), и переформируем этих 9 учеников в 3 команды из разных школ: АВГ, БВГ и БВГ.