Олимпиада «Курчатов»

2015–16 учебный год

Заключительный этап

7 класс

Задача 7.1

Условие

Из-за долгого использования школьный динамометр стал давать неправильные показания, хотя для его пружины всё ещё оставался справедливым закон Гука. Когда к динамометру подвесили груз массой 200 г, динамометр показал 3,0 Н, а когда подвесили груз массой 350 г, динамометр показал 4,8 Н. Найдите показания этого динамометра, если к нему подвесить груз массой 300 г.

Возможное решение

По условию для пружины динамометра справедлив закон Гука, значит, её удлинение прямо пропорционально приложенной к динамометру силе, а сила, действующая на динамометр, прямо пропорциональна массе подвешенного груза. Следовательно, удлинение пружины также прямо пропорционально массе подвешенного груза m. Как видно из условия, показания динамометра не прямо пропорциональны массе подвешенного груза, значит, у динамометра сбит ноль. Получаем, что зависимость показаний динамометра F от массы подвешенного груза линейна:

$$F = A + Bm.$$

Найдём коэффициенты этой зависимости:

$$B = \frac{4{,}8\ \text{Н} - 3{,}0\ \text{Н}}{350\ \text{г} - 200\ \text{г}} = 12\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}},$$

$$A = 3{,}0\ \text{Н} - 12\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 200\ \text{г} = 0{,}6\ \ \text{Н}.$$

Найдём показания динамометра, когда к нему подвесят груз массой 300 г

$$A + B \cdot 300\ \text{г} = 4{,}2\ \text{Н}.$$

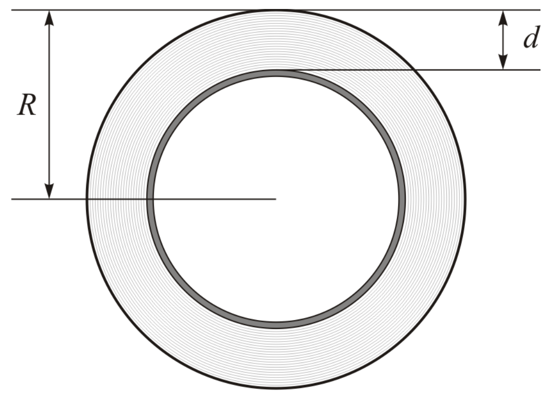
Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что растяжение пружины динамометра прямо пропорционально приложенной к ней силе ....1 балл
Указано, что показания динамометра линейно зависят от массы подвешенного груза...2 балла
Получен правильный ответ ....2 балла
Если получен неправильный ответ из-за вычислительной ошибки (ход решения правильный), решение оценивается в 4 балла.

Задача 7.2

Условие



Внешний радиус рулона клейкой ленты (скотча) равен $R = 60$ мм, а толщина рулона $d = 19$ мм (см. рис.). Длина ленты в рулоне $L = 150$ м. Пользуясь этими данными, как можно точнее определите:

1. количество слоёв в рулоне,
2. толщину одного слоя.

Примечание: длина l окружности находится по формуле $l = 2\pi r$, где r — радиус окружности, $\pi \approx$ $\approx 3{,}141593$.

Возможное решение

Способ 1. Введем величину, которая впоследствии «сократится» – ширину ленты h. Пусть толщина ленты равна x. Объём пространства, занятый клейкой лентой, равен: $hxL = h\pi[R^2 - (R-d)^2]$. Из этой формулы следует: $x = \pi(2Rd - d^2)/L \approx 40$ мкм. Количество слоёв равно

$$N = \frac{d}{x} \approx 475.$$

Способ 2. Длину ленты в одном слое можно найти по формуле $l = 2\pi r$. Но у разных слоёв разные радиусы (наибольший радиус, равный R, у внешнего слоя, а наименьший, равный $R - d$, у внутреннего). Поэтому будем использовать среднее значение радиуса слоя, равное $r_{\text{ср}} = R - \frac{d}{2} = 50{,}5$ мм. Тогда число слоёв равно

$$N = \frac{L}{2\pi r_{\text{ср}}} \approx 473.$$

Толщину одного слоя найдём, разделив общую толщину рулона на количество слоёв:

$$d_0 = \frac{d}{N} \approx 40 \text{ мкм}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что число слоёв равно длине ленты, делённой на длину одного слоя ....1 балл
Найдено число слоёв ....1 балл
Указано, что толщина одного слоя равна общей толщине, делённой на число слоёв ....1 балл
Найдена толщина одного слоя ....1 балл
Для расчётов использовалось среднее значение радиуса ....1 балл
(если для расчётов использовалось не среднее, а какое-либо другое значение радиуса, но всё остальное сделано правильно, решение оценивается в 4 балла)

Задача 7.3

Условие

Спортсмен начал забег по прямой и первые 10 м бежал со скоростью 10 м/с, следующие 10 м – со скоростью 9 м/с, следующие 10 м – со скоростью 8 м/с, и так далее… Какое расстояние S он пробежал к тому моменту, когда остановился? Сколько времени длился забег до остановки? С какой средней скоростью он пробежал первую половину дистанции $S/2$? Какое расстояние он пробежал за первую половину времени забега?

Возможное решение

Поскольку скорость спортсмена на каждом следующем участке на 1 м/с меньше, чем на предыдущем, а скорость на первом участке равна 10 м/с, всего спортсмен пробежит 10 участков, то есть $S = 10 \cdot 10\ \text{м} = 100\ \text{м}$. Время забега t найдём непосредственным расчётом:

$$t = \frac{10\ \text{м}}{10\ \text{м/с}} + \frac{10\ \text{м}}{9\ \text{м/с}} + \cdots + \frac{10\ \text{м}}{2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} + \frac{10\ \text{м}}{1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 29{,}3\ \text{с}.$$

Рассчитаем время t_1, за которое спортсмен пробежал первую половину дистанции:

$$t_1 = \frac{10\ \text{м}}{10\ \text{м/с}} + \frac{10\ \text{м}}{9\ \text{м/с}} + \cdots + \frac{10\ \text{м}}{7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} + \frac{10\ \text{м}}{6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 6{,}45\ \text{с}.$$

Средняя скорость на первой половине пути равна

$$v_1 = \frac{\frac{S}{2}}{t_1} \approx 7{,}74\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Когда прошла ровно половина времени забега, спортсмен бежал со скоростью 2 м/с. Он начал бежать с такой скоростью через 14,29 с после старта. Значит, за половину времени он пробежал расстояние, равное

$$s_2 = 80\ \text{м} + 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \left(\frac{t}{2} - 14{,}29\ \text{с}\right) = 80{,}7\ \text{м}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдено пройденное расстояние ....1 балл
Найдено время забега...1 балл
Найдена средняя скорость на первой половине дистанции .... 1 балл
Найдено расстояние, пройденное за первую половину времени......................................2 балла

Задача 7.4

Условие

Полая тонкостенная металлическая капсула в форме шара лежит на дне цилиндрического сосуда с площадью дна $S = 5$ м^2. Капсула наполовину заполнена водой, а наполовину – воздухом. Масса оболочки капсулы равна $M = 2$ т, а масса воды в ней – $m = 1{,}5$ т. С помощью легкого насоса, встроенного в корпус капсулы, вода переливается из неё в сосуд, и капсула всплывает. На сколько изменится (поднимется или опустится) уровень воды в сосуде в этом процессе (считая от момента, когда вся вода еще находится в капсуле, и до момента, когда капсула плавает опустошённая)? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Возможное решение

Масса воды, наполовину заполняющей капсулу, равна m, значит, объём капсулы равен

$$V = \frac{2m}{\rho} = 3 \text{ м}^3.$$

Вначале капсула вытесняет объём воды, равный объёму капсулы. В конце, согласно закону Архимеда, капсула вытесняет воду весом, равным весу капсулы. Дополнительно вода из капсулы была перелита в сосуд, поэтому изменение уровня воды в сосуде равно

$$\Delta h = \frac{M + m - 2m}{\rho S} = 10 \text{ см}.$$

Критерии оценивания

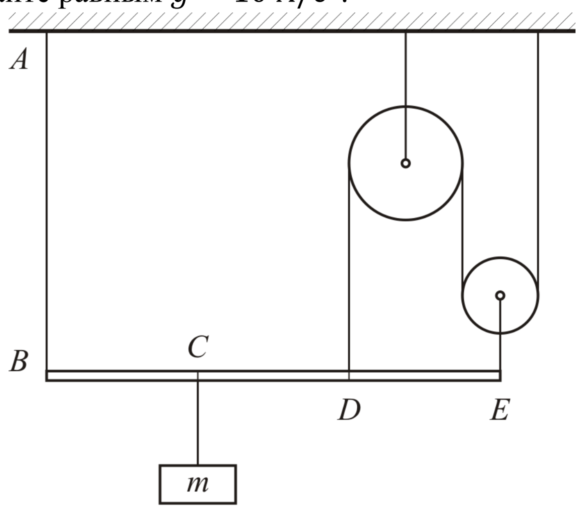
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найден объём воды, вытесняемой капсулой в начале ....1 балл
Найден объём воды, вытесняемой капсулой в конце ....1 балл
Учтено, что вода из капсулы была перелита в сосуд...1 балл
Получен ответ ....2 балла

Задача 7.5

Условие

К лёгкому стержню BE подвешен груз массой $m = 6$ кг (см. рис.). Стержень удерживается системой идеальных блоков и нитей. Вся система находится в равновесии. Найдите силу натяжения нити AB. Точки C и D делят стержень на три равные части. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение

Пусть искомая сила натяжения равна T_1, а сила натяжения нити, прикреплённой к стержню в точке D, равна T_2. Поскольку подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза, то сила натяжения нити, прикреплённой к стержню в точке E будет равна $2T_2$. Из условия равновесия груза следует, что сила натяжения нити, которой груз прикреплён к стержню, равна mg. Запишем условие равновесия стержня:

$$T_1 + 3T_2 = mg. \qquad (1)$$

Запишем правило моментов для стержня относительно точки C:

$$T_1\frac{l}{3} = T_2\frac{l}{3} + 2T_2\frac{2l}{3} \Longrightarrow T_2 = \frac{T_1}{5},$$

где l — длина стержня. Подставив полученное выражение для T_2 в (1), получим

$$T_1 = \frac{5}{8}mg = 37{,}5 \text{ Н}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что сила натяжения нити, прикреплённой к точке E в 2 раза больше силы натяжения нити, прикреплённой в точке D .... 1 балл
Записано условие равновесия стержня (1) .... 1 балл
Записано правило моментов для стержня .... 1 балл
Получен ответ .... 2 балла